Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Licenciatura em Matemática

Ano lectivo 2003/2004 Folha 1

1. Escreva a matriz do tipo 3×3 cuja entrada na posição (i, j) é $i - 2j$.

2. Escolha duas matrizes da lista seguinte de tal forma que a sua soma esteja definida e calcule a matriz soma.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

3. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

   Calcule a matriz $2(A + B) - AB$.

4. Calcule os produtos AB e BA, quando definidos, nos seguintes casos:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$,

   (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2/3 \\ 5 & 5/2 & 5/3 \end{bmatrix}$.

5. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   Verifique que $AB = AC$ e $BD = CD$.

6. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Escolha uma maneira de as ordenar de tal modo que o produto das quatro matrizes esteja definido e calcule esse produto.

7. Mostre que se os produtos AB e BA estão ambos definidos e A é do tipo $m \times n$, então B é do tipo $n \times m$.

8. Sendo $A = [a_{ij}]_{i=1,\ldots,n;j=1,\ldots,n}$ e $B = [b_{ij}]_{i=1,\ldots,n;j=1,\ldots,n}$ duas matrizes do tipo $n \times n$.

   (a) escreva o elemento da matriz $A^2 + B$ situado na linha i e na coluna j;

   (b) escreva o elemento da matriz $A - BA + 2I_n$ situado na linha i e na coluna j.

9. Sejam α e β números reais, calcule o produto $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$.

10. Calcule:

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^2$; (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^3$; (c) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}^5$; (d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^k$ $(k \in \mathbb{N})$;

(e) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^k$ $(k \in \mathbb{N})$; (f) $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^k$ $(\theta \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N})$; (g) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3$.

11. Calcule: $\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{bmatrix}^k$ $(k \in \mathbb{N})$.

12. (a) Verifique que as identidades algébricas $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$, $(A-B)^2 = A^2-2AB+B^2$, $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ e $(AB)^2 = A^2B^2$ nem sempre são verdadeiras quando A e B são matrizes. Considere, por exemplo, as matrizes seguintes:

(i) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; (ii) $A = \begin{bmatrix} i & 1+i \\ -i & 1-i \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -i & 2+i \\ 3i & 1-i \end{bmatrix}$.

(b) Transforme os segundos membros daquelas identidades de forma a obter identidades sempre válidas para A e B matrizes quadradas quaisquer da mesma ordem.

(c) Mostre que se duas matrizes A e B verificam a primeira identidade algébrica referida em (a) então A e B também verificam as outras três identidades.

13. Prove que o produto de duas matrizes triangulares superiores (resp. inferiores) da mesma ordem é ainda uma matriz triangular superior (resp. inferior). A que são iguais os elementos diagonais neste caso?

14. Prove que multiplicar uma matriz A $m \times n$ à esquerda por uma matriz diagonal de elementos diagonais $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ equivale a multiplicar a 1ª linha por α_1, a 2ª linha por α_2, etc. Prove a seguir que multiplicar A à direita por uma matriz diagonal de elementos diagonais $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ equivale a multiplicar a 1ª coluna por α_1, a 2ª coluna por α_2, etc.

15. Ache todas as matrizes permutáveis com A, sendo:

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$; (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

16. Sejam A e B matrizes $m \times n$. Prove que, se $Av = Bv$ para todo o vector-coluna v $n \times 1$, então $A = B$. (**Sugestão:** Que conclusões tira se v for, por exemplo, o vector com a primeira componente igual a 1 e as restantes iguais a 0 ?)

17. Prove que uma matriz que comute com uma matriz diagonal de elementos diagonais todos distintos tem de ser ela própria uma matriz diagonal.