Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Licenciatura em Matemática

Ano lectivo 2005/2006 Folha 1

1. Escreva a matriz do tipo 3×3 cuja entrada na posição (i, j) é $i - 2j$.

2. Escolha duas matrizes da lista seguinte de tal forma que a sua soma esteja definida e calcule a matriz soma.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

3. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Calcule a matriz $2(A+B) - AB$.

4. Calcule os produtos AB e BA, quando definidos, nos seguintes casos:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$,

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2/3 \\ 5 & 5/2 & 5/3 \end{bmatrix}$.

5. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Verifique que $AB = AC$ e $BD = CD$.

6. Sejam α e β números reais, calcule o produto $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$.

7. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escolha uma maneira de as ordenar de tal modo que o produto das quatro matrizes esteja definido e calcule esse produto.

8. Sendo $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ duas matrizes do tipo $n \times n$.

(a) Escreva o elemento da matriz $A^2 + B$ situado na linha i e na coluna j;

(b) Escreva o elemento da matriz $A - BA + 2I_n$ situado na linha i e na coluna j.

9. Designe-se por v_j a coluna j de $A \in M_{m\times n}$ para cada $j = 1, \ldots, n$. Dada uma matriz-coluna

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

verifique que $Ax = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n$. (Dizemos que Ax é uma **combinação linear** das colunas de A). Note-se que, uma vez que AB se obtém multiplicando A pelas colunas de B, podemos concluir que as colunas de AB são combinações lineares das colunas de A. Veja se algo de semelhante se passa com as linhas de AB.

10. Sejam A e B matrizes $m \times n$. Prove que, se $Av = Bv$ para toda a matriz-coluna v do tipo $n\times 1$, então $A = B$. (**Sugestão:** Que conclusões tira se v for, por exemplo, o vector com a primeira componente igual a 1 e as restantes iguais a 0 ?)

11. Calcule:
(a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^2$; (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^3$; (c) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}^5$; (d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^k$; (e) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^k$ $(k \in \mathbb{N})$.

12. Considere os seguintes "casos notáveis":

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2, \qquad (A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2,$$
$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 \qquad \text{e} \qquad (AB)^2 = A^2B^2.$$

(a) Verifique que estas fórmulas algébricas nem sempre são verdadeiras quando A e B são matrizes. Considere, por exemplo, as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(b) Transforme os segundos membros dos casos notáveis listados de forma a obter identidades sempre válidas para A e B matrizes quadradas quaisquer da mesma ordem.

(c) Mostre que se duas matrizes A e B verificam o primeiro caso notável então A e B também verificam os restantes.

13. Ache todas as matrizes permutáveis com A, sendo:
(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$; (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

14. Em cada uma das alíneas dê exemplos de matrizes reais 2×2 com a propriedade indicada.

(a) $A^2 = -I$.

(b) $A^n = A$ para qualquer $n \geq 1$ e $A \neq I$.

(c) $A^2 = 0$, sendo A não nula.

(d) $AB = 0$, não tendo A nem B nenhum elemento nulo.

(e) $AB = 0$ e $BA \neq 0$.

15. Prove que o produto de duas matrizes triangulares superiores (resp. inferiores) da mesma ordem é ainda uma matriz triangular superior (resp. inferior). A que são iguais os elementos diagonais neste caso?