Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Licenciatura em Matemática

Ano lectivo 2003/2004 Folha 12

184. Seja F um subespaço de $\mathbb{R}^n$. O conjunto dos elementos de $\mathbb{R}^n$ que são ortogonais a todos os elementos de F chama-se *complemento ortogonal de F*. A notação habitual é $F^\perp$. Simbolicamente

$$F^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n : \forall_{v \in F}\ \langle u, v\rangle = 0\}.$$

Prove que:

(a) $F^\perp$ também é um subespaço de $\mathbb{R}^n$; (b) $F \cap F^\perp = \{0\}$; (c) $F \subseteq (F^\perp)^\perp$;
(d) $F_1 \subseteq F_2 \Longrightarrow F_2^\perp \subseteq F_1^\perp$; (e) $(F_1 + F_2)^\perp = F_1^\perp \cap F_2^\perp$;
(f) Se $\{v_1, \ldots, v_k\}$ for uma base de F, então $F^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n : \langle u, v_i\rangle = 0 \text{ para } i = 1, \ldots, k\}$.

185. Sendo $F = \mathcal{L}\{(1,0,0),(0,1,0)\}$, determine $F^\perp$.

186. Sendo $F = \mathcal{L}\{(1,-1,1)\}$, determine uma base para $F^\perp$.

187. Seja A uma matriz real. Prove que $\mathcal{N}(A^T) = C(A)^\perp$.

188. Que múltiplo de $v_1 = (1,1)$ devemos subtrair de $v_2 = (4,0)$ para que o resultado seja ortogonal a v_1? Faça uma figura.

189. Determine uma base para o complemento ortogonal do subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vectores $(1,-1,1,-1)$ e $(2,3,-1,2)$ e a partir dela uma base ortonormada.

190. Utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, obtenha uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ a partir dos vectores $(1,0,1)$, $(1,0,-1)$, $(0,3,4)$.

191. Seja F o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vectores $(1,1,-1,-2)$, $(-2,1,5,11)$, $(0,3,3,7)$ e $(3,-3,-3,-9)$. Determine a dimensão de F e encontre uma base ortonormada para F.

192. Projecte o vector $b = (1,3,2)$ sobre os vectores (não ortogonais) $v_1 = (1,0,0)$ e $v_2 = (1,1,0)$. Mostre que, ao contrário do caso ortogonal, a soma das duas projecções não dá a projecção ortogonal de b sobre o subespaço gerado por v_1 e v_2.

193. Seja F um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Prove que $(F^\perp)^\perp \subseteq F$.

(**Sugestão:** Sendo $x \in (F^\perp)^\perp$ e x_F a sua projecção ortogonal sobre F, tem-se $x - x_F \in F^\perp$. Logo, $0 = \langle x, x - x_F\rangle = \langle x_F + x - x_F, x - x_F\rangle = \langle x_F, x - x_F\rangle + \langle x - x_F, x - x_F\rangle = \|x - x_F\|^2$.)

194. Calcule a projecção ortogonal do vector $(2,-2,1)$ sobre o plano gerado pelos vectores $(1,1,1)$ e $(0,1,3)$.

195. Exprima a ortogonalização de Gram-Schimdt de $v_1 = (1,2,2)$ e $v_2 = (1,3,1)$ na forma $A = QR$, onde A é a matriz 3×2 cujas colunas são v_1 e v_2, Q é a matriz 3×2 cujas colunas são os vectores u_1 e u_2 (ortonormados, isto é, ortogonais e de norma 1) obtidos pelo processo e R é uma matriz 2×2 triangular superior não-singular.

196. Factorize na forma $A = QR$ as seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

197. Sejam A $m \times n$ e b $m \times 1$ reais. Na aula teórica demonstrou-se, por um processo muito indirecto, que o sistema $A^T Ax = A^T b$ (que surge a propósito do método dos mínimos quadrados) é de certeza possível. Demonstre esse facto directamente, sem recurso à noção de projecção ortogonal. (**Sugestão:** Estude a característica da matriz ampliada do sistema e recorde que car$(MN) \leq$car(M) e car$(A^T A)$=car(A).)

198. Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 10 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}$ determine a solução no sentido dos mínimos quadrados de $Ax = b$ por dois processos:

(a) Calculando a projecção ortogonal p de b sobre $C(A)$ e depois resolvendo $Ax = p$.

(b) Resolvendo as "equações normais" $A^T Ax = A^T b$.

199. (a) Determine a solução no sentido dos mínimos quadrados do sistema $\begin{cases} x_1 & & = & 1 \\ & x_2 & = & 1 \\ x_1 & + \; x_2 & = & 0 \end{cases}$.

(b) Designando por A a matriz do sistema, por b o vector dos segundos membros, e por $\overline{x}$ a solução encontrada, determine a projecção $p = A\overline{x}$ de b sobre $C(A)$.

(c) Determine o "resíduo mínimo", $r(\overline{x}) = b - A\overline{x}$, e a sua norma.

(d) Comprove que $r(\overline{x})$ é perpendicular às colunas de A.

200. Determine a solução no sentido dos mínimos quadrados do sistema (com m equações e uma incógnita) $x = \beta_1$, $x = \beta_2$, $\ldots$, $x = \beta_m$. Comente.

201. Determine todas as soluções no sentido dos mínimos quadrados do sistema $Ax = b$ onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

202. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

(a) Determine uma base ortonormada para o espaço das colunas de A.

(b) Calcule a projecção ortogonal de $b = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}^T$ sobre esse espaço.

(c) O que pode concluir do resultado da alínea anterior sobre o sistema $Ax = b$? (Não resolva o sistema.)

203. Determine a linha recta que melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, aos seguintes pontos (e represente geometricamente):

(a) $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(3, 12)$; (b) $(1, 2)$, $(0, 0)$, $(1, -3)$, $(2, -5)$.