**Álgebra Linear e Geometria Analítica I**

Licenciatura em Matemática

Ano lectivo 2005/2006 Folha 12

169. No espaço $\mathbb{R}^3$, considere os vectores $u = (1,2,3)$ e $v = (-3,0,1)$.

    (a) Verifique que $u$ e $v$ são ortogonais.

    (b) Calcule as normas de $u$ e de $v$.

    (c) Escreva os vectores $\frac{u}{\|u\|}$ e $\frac{v}{\|v\|}$ e verifique que têm norma 1. Generalize esta observação.

170. Que mudança se dá no ângulo entre os vectores não nulos $x$ e $y$ se:

    (a) se multiplicar $x$ por um número positivo?

    (b) se multiplicar $x$ por um número negativo?

    (c) se multiplicar $x$ e $y$ por números negativos?

171. Mostre que o triângulo em $\mathbb{R}^3$ cujos vértices são $u = (\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$, $v = (1, -\sqrt{2}, 1)$ e $w = (-1, \sqrt{2}, -1)$ é rectângulo e isósceles.

172. Calcule o ângulo que o vector $(1,1,...,1) \in \mathbb{R}^n$ faz com os vectores da base canónica.

173. Prove que a norma da projecção ortogonal de $y$ sobre $x$, sendo $x \neq (0,\ldots,0)$, é $\frac{|\langle x,y\rangle|}{\|x\|}$.

174. Prove que uma base $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ é ortonormada se e só se $\langle u_i, u_j\rangle = \delta_{ij}$, $i,j = 1,...,n$.

175. Seja $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ uma base ortonormada de $\mathbb{R}^n$. Seja $x \in \mathbb{R}^n$ um vector qualquer.

    (a) Mostre que as coordenadas de $x$ na base $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ são $\langle x, u_1\rangle, \langle x, u_2\rangle, ..., \langle x, u_n\rangle$. (Sugestão: escreva $x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n$ e calcule $\langle x, u_j\rangle$.)

    (b) Use a alínea (a) para concluir que, se $x$ tiver norma 1, então as suas coordenadas na base $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ são os cosenos dos ângulos $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$ de $x$ com os vectores da base. Conclua que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \cos^2\theta_i = 1$.

    (**Nota:** Aos valores $\cos\theta_1, \cos\theta_2, ..., \cos\theta_n$ chamamos <u>cosenos directores</u> do vector $x$.)

176. A desigualdade de Cauchy-Schwarz pode ser aplicada em várias situações. Use-a para demonstrar o seguinte facto: Sendo $\alpha, \beta$ e $\mu$ números reais arbitrários, tem-se $\alpha\beta + \beta\mu + \mu\alpha \leq \alpha^2 + \beta^2 + \mu^2$. Supondo que $\alpha\beta\mu \neq 0$, conseguirá dizer exactamente em que casos é que nesta desigualdade ocorre igualdade?

177. Analisando a demonstração da desigualdade de Cauchy-Schwarz, diga quando é que nessa desigualdade ocorre igualdade.

178. Mostre que para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, se tem $\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|$. O que é que isto significa geometricamente em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$?

179. Averigúe em que casos ocorre igualdade na desigualdade triangular.

180. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$. Demonstre que:

(a) Se $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, então $x$ e $y$ são ortogonais.

(b) Se $\|x\| = \|y\|$, então os vectores $x+y$ e $x-y$ são ortogonais.

(c) Se $x$ e $y$ forem ortogonais então $\|x+y\| = \|x-y\|$.

Interprete geometricamente, para $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, as alíneas (b) e (c).

181. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$. Prove que $x$ e $y$ são ortogonais se e só se $\|x\| \leq \|x + \alpha y\|$ para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$.

182. Sendo $x, y \in \mathbb{R}^n$ e sendo $\theta$ o ângulo entre eles, mostre que $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\,\|x\|\,\|y\| \cos\theta$. Note que este enunciado generaliza o Teorema de Pitágoras.

183. Em $\mathbb{R}^n$ a norma define-se a partir do produto interno. Curiosamente, também é possível obter o produto interno usando só a norma, através da igualdade $\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$. Demonstre esta igualdade.

184. (a) Mostre que, se uma matriz $Q$, do tipo $n \times n$, for ortogonal, então $\langle Qx, Qy\rangle = \langle x, y\rangle$ para quaisquer vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(b) Conclua que uma matriz ortogonal não altera os ângulos entre vectores de $\mathbb{R}^n$.

185. (a) Mostre que, se uma matriz $Q$, do tipo $n \times n$, for ortogonal, então $\|Qx\| = \|x\|$ para todo o vector $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Mostre que, reciprocamente, se $\|Qx\| = \|x\|$ para todo o vector $x \in \mathbb{R}^n$, então $Q$ é ortogonal. (Sugestão: Basta mostrar que $\langle Q^T Qu, v\rangle = \langle u, v\rangle$ para quaisquer $u$ e $v$ (justifique). Use-se o exercício 183, notando que $\langle Q^T Qu, v\rangle = \langle Qu, Qv\rangle$.)

**Nota**: Observe-se que deste exercício concluímos que uma matriz real do tipo $n \times n$ é ortogonal se e só se não altera a norma dos vectores de $\mathbb{R}^n$.

186. Seja $F$ um subespaço de $\mathbb{R}^n$. O conjunto dos elementos de $\mathbb{R}^n$ que são ortogonais a todos os elementos de $F$ chama-se *complemento ortogonal de F*. A notação habitual é $F^\perp$. Mais precisamente, $F^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n : \forall_{v \in F}\ \langle u, v\rangle = 0\}$. Prove que:

(a) $F^\perp$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$;

(b) $F \cap F^\perp = \{0\}$;

(c) $F \subseteq (F^\perp)^\perp$;

(d) $F_1 \subseteq F_2 \Longrightarrow F_2^\perp \subseteq F_1^\perp$;

(e) $(F_1 + F_2)^\perp = F_1^\perp \cap F_2^\perp$;

(f) Se $\{v_1, \ldots, v_k\}$ for uma base de $F$, então $F^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n : \langle u, v_i\rangle = 0 \text{ para } i = 1, \ldots, k\}$.

187. Sendo $F = \mathscr{L}\{(1,0,0), (0,1,0)\}$, determine $F^\perp$.

188. Sendo $F = \mathscr{L}\{(1,-1,1)\}$, determine uma base para $F^\perp$.

189. Seja $A$ uma matriz real. Prove que $N(A^T) = C(A)^\perp$.