Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Licenciatura em Matemática

Ano lectivo 2003/2004 Folha 13

204. (a) Determine uma base ortogonal para o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por $(1,1,1)$ e $(0,3,6)$.

(b) Calcule a projecção ortogonal do vector $(1,4,5)$ sobre o subespaço da alínea (a).

(c) Usando o resultado da alínea anterior, determine a linha recta que melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, aos pontos $(0,1)$, $(3,4)$, $(6,5)$. Represente graficamente.

205. Dado um conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$ podemos procurar, em vez de uma recta, outras curvas para se ajustarem a esses pontos. Por exemplo, dado os pontos (0,3), (1,2), (2,4), (3,4), determine o polinómio do segundo grau cujo gráfico melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, a esses pontos. Faça uma figura.

206. Calcule o volume do paralelipípedo definido por $(-3,2,1)$, $(1,0,-1)$ e $(3,3,-1)$.

207. Sendo v_1 e v_2 vectores de $\mathbb{R}^3$, e designando por A a matriz 3×2 cujas colunas são v_1 e v_2, mostre que a área do paralelogramo definido por v_1 e v_2 é igual a $\sqrt{\det(A^TA)}$.

208. Calcule a área do paralelogramo definido por $(-3,2,1)$ e $(1,0,-1)$.

209. Sendo $u=(2,-1,3), v=(0,1,7)$ e $w=(1,4,5)$, calcular:

$v\wedge w$; $u\wedge(v\wedge w)$; $(u\wedge v)\wedge w$; $(u\wedge v)\wedge(v\wedge w)$;
$u\wedge(v-2w)$; $(u\wedge v)-2w$

210. Em cada uma das alíneas ache um vector ortogonal aos dois vectores:

(a) $u=(-7,3,1), v=(2,0,4)$ (b) $u=(-1,-1,-1), v=(2,0,2)$

211. Dados u,v,w em $\mathbb{R}^3$, mostre que o volume do paralelipípedo definido por u,v e w é igual a $|\langle u, v\wedge w\rangle|$.

212. Sendo $u,v\in\mathbb{R}^3$, mostre que o determinante da matriz cujas colunas são u,v e $u\wedge v$ é ≥ 0.

213. Diga se os vectores $a=(1,6,4,4,-2)$ e $b=(1,6,5,4,-2)$ pertencem ao plano em $\mathbb{R}^5$ de equação $x=p+\alpha_1v_1+\alpha_2v_2$, onde $p=(2,3,-1,1,1)$, $v_1=(3,-1,1,-1,1)$ e $v_2=(-1,1,1,1,-1)$.

214. Para cada uma das seguintes rectas em $\mathbb{R}^4$, determine a sua posição em relação ao plano que passa por $(1,0,0,1)$ e é paralelo aos vectores $(5,2,-3,1)$, $(4,1,-1,0)$ e $(-1,2,-5,3)$

(a) $x=(3,1,-4,1)+\alpha(-1,1,2,1),\ \ \alpha\in\mathbb{R}$ (b) $x=(3,0,-4,1)+\alpha(-1,1,2,1),\ \ \alpha\in\mathbb{R}$
(c) $x=(-2,0,-1,2)+\alpha(1,1,-2,1),\ \ \alpha\in\mathbb{R}$

NOTA: Os exercícios seguintes dizem todos respeito ao espaço $\mathbb{R}^3$. Neles usaremos a palavra "plano" para significar "plano de dimensão 2".

215. Determine equações paramétricas do plano que passa por $(1,1,0)$, $(6,0,-1)$ e $(3,0,0)$.

216. Determine equações paramétricas da recta que passa por $(3,1,-1)$ e tem a direcção de $(1,-1,2)$.

217. Determine equações paramétricas do plano que passa por $(1, 2, 2)$ e é paralelo às rectas

$$\begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = -1 - \alpha \\ z = -2\alpha \end{cases} \qquad \text{e} \qquad x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}.$$

218. Determine equações paramétricas da recta que passa por $(2, 1, -3)$ e por $(4, 0, -2)$.

219. Determine equações paramétricas do plano que passa por $(1, 1, 0)$ e $(1, -1, -1)$ e é paralelo a $(2, 1, 0)$.

220. Diga se existe um plano que contenha $(2, 1, 3), (0, 3, 9), (3, 3, 4)$ e $(7, 5, 0)$.

221. Mostre que a intersecção dos planos $\{(8, 0, 0)\} + \mathcal{L}\{(-4, 1, 0), (2, 0, 1)\}$ e $\mathcal{L}\{(1, 0, -2), (0, 1, 1)\}$ é uma recta e determine equações paramétricas dessa recta.

222. Determine equações paramétricas do plano que contém $(1, 0, 0)$ e também contém a recta de equação $x = (0, 1, 0) + \alpha(0, 1, -2), \alpha \in \mathbb{R}$.

223. Escreva uma equação geral (ou cartesiana) de cada um dos seguintes planos:

   (a) O plano que contém o ponto $(1, 2, 3)$ e é perpendicular ao vector $(-1, 1, 0)$.

   (b) O plano que contém os pontos $(2, 1, 3)$, $(-3, -1, 3)$ e $(4, 2, 3)$.

   (c) O plano que contém o ponto $(6, 0, -2)$ e é paralelo aos vectores $(1, 0, 0)$ e $(0, -2, 1)$.

   (d) O plano que contém o ponto $(4, -1, 2)$ e é paralelo ao plano $2x - 3y - z = 5$.

224. Dado o plano de equação cartesiana $3x - 2y - z = 6$, determine equações paramétricas desse plano.

225. (a) Considere o plano de equação cartesiana $ax + by + cz = d$. Qual é o significado geométrico da condição $c = 0$?

   (b) Sejam dados m pontos. Como procederia para determinar o plano (não paralelo ao eixo dos zz) que melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, a esses m pontos?

226. Considere os seguintes vectores: $p = (1, 0, 0)$, $q = (0, 1, 0)$, $v = (0, 1, -2)$. Determine:

   (a) Uma equação cartesiana do plano que contém p e é ortogonal a v.

   (b) Equações paramétricas do plano que contém p e também contém a recta de equação $x = q + \alpha v$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

227. Calcule a distância do ponto $b = (2, 1, 0)$ ao plano de equação $x + y - z = 0$. Qual é o ponto desse plano que está mais próximo de b?

228. Considere o hiperplano em $\mathbb{R}^4$ $x = \{p\} + F$, onde $p = (0, 0, -3, 6)$ e F é gerado pelos vectores $(1, 0, 2, -2)$, $(0, 1, -2, 0)$ e $(2, 1, 6, -4)$.

   (a) Determine uma equação cartesiana deste hiperplano.

   (b) Calcule a distância de $x_0 = (5, 3, -1, -1)$ a esse hiperplano.