

190. Que múltiplo de $v_1 = (1, 1)$ devemos subtrair de $v_2 = (4, 0)$ para que o resultado seja ortogonal a v_1 ? Faça uma figura.
191. Determine uma base para o complemento ortogonal do subespaço de \mathbb{R}^4 gerado pelos vectores $(1, -1, 1, -1)$ e $(2, 3, -1, 2)$ e a partir dela uma base ortonormada.
192. Utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, obtenha uma base ortonormada para \mathbb{R}^3 a partir dos vectores $(1, 0, 1)$, $(1, 0, -1)$, $(0, 3, 4)$.
193. Seja F o subespaço de \mathbb{R}^4 gerado por $(1, 1, -1, -2)$, $(-2, 1, 5, 11)$, $(0, 3, 3, 7)$ e $(3, -3, -3, -9)$. Determine a dimensão de F e encontre uma base ortonormada para F .
194. Projecte o vector $b = (1, 3, 2)$ sobre os vectores (não ortogonais) $v_1 = (1, 0, 0)$ e $v_2 = (1, 1, 0)$. Mostre que, ao contrário do caso ortogonal, a soma das duas projecções não dá a projecção ortogonal de b sobre o subespaço gerado por v_1 e v_2 .
195. Seja F um subespaço de \mathbb{R}^n . Prove que $(F^\perp)^\perp \subseteq F$.
- (Sugestão: Sendo $x \in (F^\perp)^\perp$ e x_F a sua projecção ortogonal sobre F , tem-se $x - x_F \in F^\perp$. Logo, $0 = \langle x, x - x_F \rangle = \langle x_F + x - x_F, x - x_F \rangle = \langle x_F, x - x_F \rangle + \langle x - x_F, x - x_F \rangle = \|x - x_F\|^2$.)
196. Calcule a projecção ortogonal do vector $(2, -2, 1)$ sobre o plano gerado pelos vectores $(1, 1, 1)$ e $(0, 1, 3)$.
197. Exprima a ortogonalização de Gram-Schmidt de $v_1 = (1, 2, 2)$ e $v_2 = (1, 3, 1)$ na forma $A = QR$, onde A é a matriz 3×2 cujas colunas são v_1 e v_2 , Q é a matriz 3×2 cujas colunas são os vectores u_1 e u_2 (ortonormados, isto é, ortogonais e de norma 1) obtidos pelo processo e R é uma matriz 2×2 triangular superior não-singular.
198. Generalize o resultado anterior provando que toda a matriz real A do tipo $m \times n$ com as colunas linearmente independentes (isto é, $\text{car}(A) = n$) se pode decompor na forma $A = QR$ onde Q é do tipo $m \times n$ e tem colunas ortonormadas e R é do tipo $n \times n$ triangular superior não-singular. Observe que $Q^T Q = I$ (Portanto, se $m = n$, Q é ortogonal.)
199. Factorize na forma $A = QR$ descrita no exercício anterior as seguintes matrizes:
- (a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
200. Sejam A do tipo $m \times n$ e do tipo b $m \times 1$ matrizes reais. Na aula teórica demonstrou-se, por um processo muito indirecto, que o sistema $A^T A x = A^T b$ (que surge a propósito do método dos mínimos quadrados) é de certeza possível. Demonstre esse facto directamente, sem recurso à noção de projecção ortogonal. (Sugestão: Estude a característica da matriz ampliada do sistema e recorde que $\text{car}(MN) \leq \text{car}(M)$ e $\text{car}(A^T A) = \text{car}(A)$.)

201. Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 10 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}$ determine a solução no sentido dos mínimos quadrados de $Ax = b$ por dois processos:

- (a) Calculando a projecção ortogonal p de b sobre $C(A)$ e depois resolvendo $Ax = p$.
- (b) Resolvendo as “equações normais”, $A^T Ax = A^T b$.

202. (a) Determine a solução no sentido dos mínimos quadrados do sistema $\begin{cases} x_1 & = & 1 \\ & x_2 & = & 1 \\ x_1 + x_2 & = & 0 \end{cases}$.

(b) Designando por A a matriz do sistema, por b o vector dos segundos membros, e por \bar{x} a solução encontrada, determine a projecção $p = A\bar{x}$ de b sobre $C(A)$.

(c) Determine o “resíduo mínimo”, $r(\bar{x}) = b - A\bar{x}$, e a sua norma.

(d) Comprove que $r(\bar{x})$ é perpendicular às colunas de A .

203. Determine a solução no sentido dos mínimos quadrados do sistema (com m equações e uma incógnita) $x = \beta_1, x = \beta_2, \dots, x = \beta_m$. Comente.

204. Determine todas as soluções no sentido dos mínimos quadrados do sistema $Ax = b$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

205. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

- (a) Determine uma base ortonormada para o espaço das colunas de A .
- (b) Calcule a projecção ortogonal de $b = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}^T$ sobre esse espaço.
- (c) O que pode concluir do resultado da alínea anterior sobre o sistema $Ax = b$? (Não resolva o sistema.)

206. Determine a linha recta que melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, aos seguintes pontos (e represente geometricamente):

- (a) $(0, 0), (1, 0), (3, 12)$;
- (b) $(1, 2), (0, 0), (1, -3), (2, -5)$.

207. (a) Determine uma base ortogonal para o subespaço de \mathbb{R}^3 gerado por $(1, 1, 1)$ e $(0, 3, 6)$.

(b) Calcule a projecção ortogonal do vector $(1, 4, 5)$ sobre o subespaço da alínea (a).

(c) Usando o resultado da alínea anterior, determine a linha recta que melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, aos pontos $(0, 1), (3, 4), (6, 5)$. Represente graficamente.

208. Dado um conjunto de pontos de \mathbb{R}^2 podemos procurar, em vez de uma recta, outras curvas para se ajustarem a esses pontos. Por exemplo, dado os pontos $(0,3), (1,2), (2,4), (3,4)$, determine o polinómio do segundo grau cujo gráfico melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, a esses pontos. Faça uma figura.