

229. O ângulo entre dois planos  $\langle u, x-p \rangle = 0$  e  $\langle v, x-q \rangle = 0$  é o ângulo entre  $u$  e  $v$  (ou o suplementar desse, se ele não pertencer ao intervalo  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .)

Calcule o ângulo entre os planos em  $\mathbb{R}^3$  de equações  $x + y + 4z = 1$  e  $x - 2y - 2z = 3$ .

230. Determine equações cartesianas da recta em  $\mathbb{R}^3$  que passa pelo ponto  $(2, -1, 4)$  e é perpendicular ao plano  $x - 3y + 2z = 1$ .

231. Determine equações paramétricas da recta em  $\mathbb{R}^3$   $\begin{cases} 2x - y - 3z = 5 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$ .

232. Calcule a distância do ponto  $x_0 = (2, 0, 7)$

(a) à recta em  $\mathbb{R}^3$  que passa pelo ponto  $p = (0, 2, -3)$  e é paralela a  $v = (2, 2, 1)$ ;

(b) à recta em  $\mathbb{R}^3$  de equações cartesianas  $\begin{cases} 5x - 2y + z = -7 \\ 3x - 3y + z = -4 \end{cases}$ .

233. Dadas as rectas em  $\mathbb{R}^3$   $\begin{cases} x = 3 + \alpha \\ y = \alpha \\ z = -1 - 2\alpha \end{cases}$  e  $\begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$

(a) verifique que são concorrentes e determine o seu ponto de intersecção;

(b) calcule o ângulo entre elas.

**Nota:** O ângulo entre duas rectas  $x = p + \alpha v$  e  $x = q + \alpha w$  é o ângulo entre  $v$  e  $w$  (ou o suplementar desse).

234. (Exame 13/6/2002) Considere a recta  $R$  em  $\mathbb{R}^3$  definida pelas equações  $\begin{cases} y - z = 0 \\ x - z = 2 \end{cases}$  e os planos  $P_1$  e  $P_2$  de equações cartesianas  $x + y - z = 0$  e  $x - y - 5 = 0$ , respectivamente. Determine:

(a) Equações paramétricas da recta paralela a  $R$  e que passa pelo ponto  $(1, 2, 3)$ . Qual é a distância entre estas duas rectas?

(b) Uma equação vectorial da recta que passa por  $(1, 0, 1)$  e é paralela aos planos  $P_1$  e  $P_2$ .

(c) Uma equação cartesiana do plano ortogonal ao plano  $P_1$  e que contém a recta  $R$ .

235. (Exame 8/7/2002) Considere as rectas  $R_1$  e  $R_2$  em  $\mathbb{R}^3$  de equações  $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 - 2t \end{cases}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  e

$\begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 3 \end{cases}$ , respectivamente, e o plano  $P$  de equação  $x + y + 2z = 2$ .

(a) Determine a posição relativa de  $R_1$  e  $R_2$ .

(b) Determine uma equação cartesiana do plano que contém  $R_1$  e  $R_2$ .

(c) Determine uma equação cartesiana do plano perpendicular a  $P$  e que contém  $R_1$ .

(d) Calcule a distância entre  $R_2$  e  $P$ .

236. (Exame 21/10/2002) Considere a recta  $R_\alpha$  em  $\mathbb{R}^3$  definida pelas equações  $\begin{cases} x + (\alpha + 1)y = 0 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$  onde  $\alpha$  é um parâmetro real.

(a) Escreva uma equação vectorial de  $R_\alpha$ .

(b) Determine  $\alpha$  de forma que:

i.  $R_\alpha$  seja perpendicular ao plano de equação  $2y + 2z = 1$ .

ii.  $R_\alpha$  seja paralela ao plano de equação  $x - 2y + 2z = 1$ , e nesse caso calcule a distância de  $R_\alpha$  a este plano.

237. Prove que, dadas duas quaisquer rectas  $x = p + \alpha v$  e  $x = q + \alpha w$  em  $\mathbb{R}^n$  com  $n \geq 3$ , existe sempre um plano de dimensão 3 que as contém a ambas. Qual é a condição necessária e suficiente para que exista um plano de dimensão 2 que as contenha?

238. Mostre que são concorrentes as duas rectas em  $\mathbb{R}^5$   $\{(2, 1, 1, 3, -3)\} + \mathcal{L}\{(2, 3, 1, 1, -1)\}$  e  $\{(1, 1, 2, 1, 2)\} + \mathcal{L}\{(1, 2, 1, 0, 1)\}$  e determine o seu ponto de intersecção. Indique o plano de dimensão 2 que contém estas duas rectas.

239. Mostre que não existe nenhum plano de dimensão 2 em  $\mathbb{R}^5$  que contenha as rectas  $\{(8, 2, 5, 15, -3)\} + \mathcal{L}\{(7, -4, 11, 13, -5)\}$  e  $\{(-7, 2, -6, -5, 3)\} + \mathcal{L}\{(2, 9, -10, -6, 4)\}$ . Indique o plano de dimensão 3 que contém estas duas rectas.

240. Considere as rectas em  $\mathbb{R}^4$  de equações paramétricas

$$\begin{cases} x_1 = 2 + 3\alpha \\ x_2 = 1 - \alpha \\ x_3 = -1 + 2\alpha \\ x_4 = 3 - 2\alpha \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_1 = 7\alpha \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 + \alpha \\ x_4 = -1 + 2\alpha \end{cases}.$$

Ache uma recta que passe pela origem e intersecte essas duas rectas, e determine os pontos de intersecção.

241. Considere os dois seguintes planos em  $\mathbb{R}^5$ :  $S_1 = \{(4, 1, 10, -3, 5)\} + \mathcal{L}\{(2, 1, 3, 0, 1), (1, -4, 0, 1, -6)\}$   $S_2 = \{(-3, 2, 1, -4, 8)\} + \mathcal{L}\{(3, -3, 3, 1, -5), (5, -2, 6, 1, -4)\}$ . Mostre que  $S_1$  e  $S_2$  coincidem.

242. Em cada uma das seguintes alíneas, são dados dois planos de dimensão 2 em  $\mathbb{R}^5$ . Pede-se para estudar a sua posição relativa, isto é, determinar a sua intersecção e, no caso de ela ser vazia, determinar a intersecção dos respectivos subespaços directores.

(a)  $\{(3, 1, 2, 0, 1)\} + \mathcal{L}\{(2, -6, 3, 1, -6), (0, 5, -2, -1, 6)\}$   
 $\{(1, 0, 1, 1, 0)\} + \mathcal{L}\{(-1, 1, -1, 0, 1), (-1, 3, -1, -1, 2)\}$

(b)  $\{(7, -4, 0, 3, 2)\} + \mathcal{L}\{(-1, 1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, 1, 1)\}$   
 $\{(6, -5, -1, 2, 3)\} + \mathcal{L}\{(1, 1, -1, 1, 1), (1, 1, 1, -1, 1)\}$

(c)  $\{(2, -3, 1, 5, 0)\} + \mathcal{L}\{(3, -2, 1, 0, 1), (-1, 5, -2, 0, 3)\}$   
 $\{(0, -1, 0, 4, 1)\} + \mathcal{L}\{(1, 2, 4, 0, -2), (6, 3, 4, 0, 3)\}$

(d)  $\{(-3, -2, 1, -1, 2)\} + \mathcal{L}\{(1, -1, 1, 1, 3), (-1, 2, 1, 2, -2)\}$   
 $\{(-1, 0, 3, 3, 8)\} + \mathcal{L}\{(1, 1, -3, -3, 1), (0, 1, 2, 3, 1)\}$