Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Licenciatura em Matemática

Ano lectivo 2005/2006 Folha 15

236. Calcule a distância do ponto $x_0 = (2,0,7)$

(a) à recta em $\mathbb{R}^3$ que passa pelo ponto $p = (0,2,-3)$ e é paralela a $v = (2,2,1)$;

(b) à recta em $\mathbb{R}^3$ de equações cartesianas $\begin{cases} 5x - 2y + z = -7 \\ 3x - 3y + z = -4 \end{cases}$.

237. Dadas as rectas em $\mathbb{R}^3$ $\begin{cases} x = 3 + \alpha \\ y = \alpha \\ z = -1 - 2\alpha \end{cases}$ e $\begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$

(a) verifique que são concorrentes e determine o seu ponto de intersecção;

(b) calcule o ângulo entre elas.

Nota: O ângulo entre duas rectas $x = p + \alpha v$ e $x = q + \alpha w$ é o ângulo entre v e w (ou o suplementar desse).

238. (Exame 13/6/2002) Considere a recta R em $\mathbb{R}^3$ definida pelas equações $\begin{cases} y - z = 0 \\ x - z = 2 \end{cases}$ e os planos P_1 e P_2 de equações cartesianas $x + y - z = 0$ e $x - y - 5 = 0$, respectivamente. Determine:

(a) Equações paramétricas da recta paralela a R e que passa pelo ponto $(1,2,3)$. Qual é a distância entre estas duas rectas?

(b) Uma equação vectorial da recta que passa por $(1,0,1)$ e é paralela aos planos P_1 e P_2.

(c) Uma equação cartesiana do plano ortogonal ao plano P_1 e que contém a recta R.

239. (Exame 8/7/2002) Considere as rectas R_1 e R_2 em $\mathbb{R}^3$ de equações $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 - 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ e $\begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 3 \end{cases}$, respectivamente, e o plano P de equação $x + y + 2z = 2$.

(a) Determine a posição relativa de R_1 e R_2.

(b) Determine uma equação cartesiana do plano que contém R_1 e R_2.

(c) Determine uma equação cartesiana do plano perpendicular a P e que contém R_1.

(d) Calcule a distância entre R_2 e P.

240. (Exame 21/10/2002) Considere a recta R_α em $\mathbb{R}^3$ definida pelas equações $\begin{cases} x + (\alpha+1)y = 0 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$ onde α é um parâmetro real.

(a) Escreva uma equação vectorial de R_α.

(b) Determine α de forma que:

i. R_α seja perpendicular ao plano de equação $2y + 2z = 1$.

ii. R_α seja paralela ao plano de equação $x - 2y + 2z = 1$, e nesse caso calcule a distância de R_α a este plano.

241. Prove que, dadas duas quaisquer rectas $x = p + \alpha v$ e $x = q + \alpha w$ em $\mathbb{R}^n$ com $n \geq 3$, existe sempre um plano de dimensão 3 que as contém a ambas. Qual é a condição necessária e suficiente para que exista um plano de dimensão 2 que as contenha?

242. Mostre que as rectas em $\mathbb{R}^5$ $\{(2,1,1,3,-3)\}+\mathscr{L}\{(2,3,1,1,-1)\}$ e $\{(1,1,2,1,2)\}+\mathscr{L}\{(1,2,1,0,1)\}$ são concorrentes e determine o seu ponto de intersecção. Indique o plano de dimensão 2 que contém estas duas rectas.

243. Mostre que não existe nenhum plano de dimensão 2 em $\mathbb{R}^5$ que contenha as rectas $\{(8,2,5,15,-3)\} + \mathscr{L}\{(7,-4,11,13,-5)\}$ e $\{(-7,2,-6,-5,3)\} + \mathscr{L}\{(2,9,-10,-6,4)\}$. Indique o plano de dimensão 3 que contém estas duas rectas.

244. Considere as rectas em $\mathbb{R}^4$ de equações paramétricas

$$\begin{cases} x_1 = 2 + 3\alpha \\ x_2 = 1 - \alpha \\ x_3 = -1 + 2\alpha \\ x_4 = 3 - 2\alpha \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x_1 = 7\alpha \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 + \alpha \\ x_4 = -1 + 2\alpha \end{cases}.$$

Ache uma recta que passe pela origem e intersecte essas duas rectas, e determine os pontos de intersecção.

245. Considere os dois seguintes planos em $\mathbb{R}^5$: $S_1 = \{(4,1,10,-3,5)\}+\mathscr{L}\{(2,1,3,0,1),(1,-4,0,1,-6)\}$ $S_2 = \{(-3,2,1,-4,8)\} + \mathscr{L}\{(3,-3,3,1,-5),(5,-2,6,1,-4)\}$. Mostre que S_1 e S_2 coincidem.

246. Em cada uma das seguintes alíneas, são dados dois planos de dimensão 2 em $\mathbb{R}^5$. Pede-se para estudar a sua posição relativa, isto é, determinar a sua intersecção e, no caso de ela ser vazia, determinar a intersecção dos respectivos subespaços directores.

(a) $\{(3,1,2,0,1)\} + \mathscr{L}\{(2,-6,3,1,-6),(0,5,-2,-1,6)\}$
$\{(1,0,1,1,0)\} + \mathscr{L}\{(-1,1,-1,0,1),(-1,3,-1,-1,2)\}$

(b) $\{(7,-4,0,3,2)\} + \mathscr{L}\{(-1,1,1,1,1),(1,-1,1,1,1)\}$
$\{(6,-5,-1,2,3)\} + \mathscr{L}\{(1,1,-1,1,1),(1,1,1,-1,1)\}$

(c) $\{(2,-3,1,5,0)\} + \mathscr{L}\{(3,-2,1,0,1),(-1,5,-2,0,3)\}$
$\{(0,-1,0,4,1)\} + \mathscr{L}\{(1,2,4,0,-2),(6,3,4,0,3)\}$

(d) $\{(-3,-2,1,-1,2)\} + \mathscr{L}\{(1,-1,1,1,3),(-1,2,1,2,-2)\}$
$\{(-1,0,3,3,8)\} + \mathscr{L}\{(1,1,-3,-3,1),(0,1,2,3,1)\}$

247. Seja $S = \{p\} + F$ um hiperplano em $\mathbb{R}^n$. Prove que, se uma recta $x = q + \alpha v$ não intersecta S, então $v \in F$. (Sugestão: Talvez ajude começar por visualizar a situação em $\mathbb{R}^2$.)

248. Prove que se dois hiperplanos $S_1 = \{p_1\} + F_1$ e $S_2 = \{p_2\} + F_2$ não se intersectam, então $F_1 = F_2$. (Sugestão: Um processo poderá ser usar o exercício anterior.)

249. Considere o hiperplano $\langle u, x-p\rangle = 0$ em $\mathbb{R}^n$. Mostre que, para todo o q pertencente ao hiperplano, se tem $\langle u, q\rangle = \langle u, p\rangle$. Conclua que todos os elementos do hiperplano têm a mesma projecção ortogonal sobre u. (Tente visualizar isto em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.)