Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Licenciatura em Matemática

Ano lectivo 2003/2004 Folha 2

18. Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $i \neq j$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Mostre que

    (a) $E_{ij}(\alpha)A$ é a matriz que se obtém de A adicionando à linha i a linha j previamente multiplicada por α.

    (b) $E_{ij}(\alpha)E_{ij}(-\alpha) = I_m$ e conclua que $E_{ij}(\alpha)$ é invertível com inversa $(E_{ij}(\alpha))^{-1} = E_{ij}(-\alpha)$.

19. Prove que uma matriz quadrada que comuta com todas as matrizes quadradas da mesma ordem tem que ser uma matriz escalar (isto é, da forma αI para algum número α).

20. Designe-se por v_j a coluna j de $A_{m\times n}$, $j = 1, \ldots, n$. Dada a matriz-coluna $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, verifique que $Ax = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n$.

21. Sejam A e B duas matrizes quadradas de ordem n. Prove que

    (a) se A é invertível, então a sua inversa é única;

    (b) se A e B são ambas invertíveis, então a matriz produto AB também é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

    (c) se A é invertível e a sua inversa é A^{-1}, então A^k ($k \in \mathbb{N}$) é invertível e $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$;

    (d) se A é invertível e C é uma matriz $n \times p$ tal que $AC = 0_{n\times p}$ ($0_{n\times p}$ a matriz nula $n \times p$), então $C = 0_{n\times p}$;

    (e) se A é invertível e D é uma matriz $m \times n$ tal que $DA = 0_{m\times n}$, então $D = 0_{m\times n}$;

    (f) se A é invertível e $AC = AD$ (C e D matrizes $n \times p$), então $C = D$;

    (g) se A é invertível e $EA = FA$ (E e F matrizes $m \times n$), então $E = F$;

    (h) se A é invertível e α é um número não nulo, então a matriz αA é invertível e $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$.

22. (a) Ache a inversa da matriz $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$.

    (b) Calcule $\begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix}^5$ usando a igualdade $\begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$.

23. Dê exemplos não triviais (isto é, $\neq I$ e $\neq -I$) de matrizes 2×2 que sejam inversas de si próprias.

24. Seja A uma matriz quadrada qualquer. Suponhamos que existe um número natural k tal que $A^k = 0$ (matriz nula). Mostre que, então $I - A$ é invertível tendo-se

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \ldots + A^{k-1}.$$

25. Usando o exercício anterior, calcule $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$.

26. Demonstre que a transposição de matrizes goza das seguintes propriedades:

    (a) $(A^T)^T = A$;

    (b) $(A+B)^T = A^T + B^T$;

    (c) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$, sendo α um escalar;

    (d) $(AB)^T = B^T A^T$;

    (e) $(A^k)^T = (A^T)^k$, sendo k um número natural;

    (f) Se A for invertível, A^T também é, tendo-se $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

27. Sendo A quadrada, mostre que $A + A^T$ é simétrica. E $A - A^T$?

28. Seja A uma matriz $m \times n$. Prove que as matrizes $A^T A$ e AA^T são simétricas. Dê um exemplo que mostre que estes dois produtos podem ser diferentes, mesmo que A seja quadrada.

29. Sejam A $n \times n$ e S $n \times m$, com A simétrica. Mostre que $S^T AS$ é simétrica.

30. Mostre que o produto de duas matrizes simétricas $n \times n$ é uma matriz simétrica se e só se as duas matrizes comutam.

31. Mostre que a inversa de uma matriz simétrica invertível é também simétrica.

32. Seja x um vector-coluna.

    (a) Verifique que o produto $x^T x$ é um número (ou matriz 1×1).

    (b) Mostre que, se os elementos de x forem reais, esse número é sempre não negativo e é 0 se e só se $x = 0$.

    (c) Dê exemplos de vectores-coluna $x \neq 0$ com elementos complexos para os quais $x^T x = 0$ e também exemplos em que $x^T x < 0$.

33. Como sabe o produto de duas matrizes pode ser a matriz nula sem que nenhum dos factores o seja. Mas se as duas matrizes (reais) forem a transposta uma da outra, tal não acontece. Concretamente: Prove que, sendo A uma matriz $m \times n$ de elementos reais, se $A^T A = 0$ então $A = 0$.

34. Uma matriz quadrada diz-se <u>ortogonal</u> se for invertível e a sua inversa coincidir com a sua transposta. Verifique que as seguintes matrizes reais são ortogonais:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \quad (\theta \in \mathbb{R}).$$

    (Observação: É possível mostrar que uma matriz ortogonal real 2×2 possui necessariamente uma das duas formas anteriores.)

35. Prove que:

    (a) O produto de duas matrizes ortogonais é ainda uma matriz ortogonal.

    (b) A inversa de uma matriz ortogonal é ainda uma matriz ortogonal.