Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Licenciatura em Matemática

Ano lectivo 2005/2006 Folha 3

27. Seja A uma matriz quadrada. Mostre que A não é invertível se

    (a) tiver uma linha ou uma coluna nula;

    (b) tiver uma linha (ou uma coluna) que é múltipla de outra.

28. Mostre que as seguintes matrizes quadradas são invertíveis.

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{bmatrix}, \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

29. Prove que, se A comuta com B e esta é invertível, então A também comuta com B^{-1}.

30. Seja A uma matriz quadrada qualquer. Suponhamos que existe um número natural k tal que $A^k = 0$ (matriz nula). Mostre que, então $I - A$ é invertível tendo-se

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \ldots + A^{k-1}.$$

31. Usando o exercício anterior, calcule $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$.

32. Demonstre que a transposição de matrizes goza das seguintes propriedades:

    (a) $(A^T)^T = A$;

    (b) $(A + B)^T = A^T + B^T$;

    (c) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$, sendo α um escalar;

    (d) $(AB)^T = B^T A^T$;

    (e) $(A^k)^T = (A^T)^k$, sendo k um número natural;

    (f) Se A for invertível, A^T também é, tendo-se $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

33. Seja $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ uma matriz particionada em blocos. Mostre que

$$M^T = \begin{bmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{bmatrix}.$$

34. Sejam A e B duas matrizes quadradas de ordem n e S uma matriz do tipo $n \times m$. Mostre que

    (a) $A + A^T$ é simétrica (que sucede a $A - A^T$?);

    (b) $S^T S$ e SS^T são simétricas;

    (c) se A é simétrica então $S^T AS$ é simétrica;

    (d) se A e B forem simétricas então AB é simétrica se e só se A e B comutam;

    (e) se A for simétrica e invertível então A^{-1} é também simétrica.

35. Seja x um vector-coluna.

    (a) Verifique que o produto $x^T x$ é um número (ou matriz 1×1).

    (b) Mostre que, se os elementos de x forem reais, então $x^T x \geq 0$ e é 0 se e só se $x = 0$.

    (c) Dê exemplos de vectores-coluna $x \neq 0$ com elementos complexos para os quais $x^T x = 0$ e também exemplos em que $x^T x < 0$.

    (d) Mostre que se A for uma matriz real então $A^T A = 0 \Longrightarrow A = A^T = 0$.

36. Uma matriz quadrada diz-se <u>ortogonal</u> se for invertível e a sua inversa coincidir com a sua transposta. Verifique que as seguintes matrizes reais são ortogonais:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \ (\theta \in \mathbb{R}).$$

37. Prove que:

    (a) O produto de duas matrizes ortogonais é ainda uma matriz ortogonal.

    (b) A inversa de uma matriz ortogonal é ainda uma matriz ortogonal.

38. Escreva todas as matrizes de permutação 3×3, incluindo $P = I$, e para cada uma identifique a sua inversa (que também é uma matriz de permutação).

39. Seja A uma matriz $n \times n$ e designemos por $v_1, v_2, ..., v_n$ as suas colunas.

    (a) Prove que A é ortogonal se e só se, para $i, j = 1, 2, ..., n$, se tem $v_i^T v_j = \delta_{ij}$.

    (b) Mostre que toda a matriz de permutação é ortogonal.

40. Uma matriz quadrada A diz-se <u>involutória</u> ou uma involução se $A^2 = I$. Mostre que cada uma das seguintes propriedades de uma matriz quadrada é consequência das outras duas: simétrica, ortogonal, involutória.

41. Determine os valores de α para os quais o sistema $\begin{cases} \alpha x + y = 1 \\ x + \alpha y = 1 \end{cases}$.

    (a) não tem solução; (b) tem uma solução; (c) tem uma infinidade de soluções.