Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Licenciatura em Matemática

Ano lectivo 2003/2004 — Folha 4

47. Considere as matrizes

$$E_{21}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

(a) O que observa relativamente às linhas de $E_{21}(2)A$ e às colunas de $AE_{21}(2)$?

(b) O que observa relativamente às linhas de $E_{32}(2)A$ e às colunas de $AE_{32}(2)$ sendo

$$E_{32}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}?$$

(c) Generalize as observações efectuadas.

48. Considere as matrizes 3×3

$$E_{21}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_{31}(\beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_{32}(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \gamma & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule os produtos $E_{21}(\alpha)E_{31}(\beta)$, $E_{31}(\beta)E_{21}(\alpha)$, $E_{21}(\alpha)E_{32}(\gamma)$, $E_{32}(\gamma)E_{21}(\alpha)$, $E_{31}(\beta)E_{32}(\gamma)$, $E_{32}(\gamma)E_{31}(\beta)$, $E_{21}(\alpha)E_{31}(\beta)E_{32}(\gamma)$ e $E_{32}(\gamma)E_{31}(\beta)E_{21}(\alpha)$. O que é que observa em cada um deles? Procure generalizar essa observação para matrizes $n \times n$.

49. Que mudança se dá no produto AB das matrizes A e B se:

(a) trocarmos as linhas i e j de A ? Efectuarmos uma permutação nas linhas de A ?

(b) trocarmos as colunas i e j de B ? Efectuarmos uma permutação nas colunas de B ?

50. Indique que efeito tem numa matriz A

(a) a multiplicação à esquerda de A por uma matriz de permutação;

(b) a multiplicação à direita de A por uma matriz de permutação.

51. Verifique que $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 \\ -\beta & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a inversa de $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

52. Verifique que $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 \\ -\beta & -\gamma & 1 \end{bmatrix}$ <u>não é</u> a inversa de $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \beta & \gamma & 1 \end{bmatrix}$.

53. Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcule A^{-1}.

54. Prove que as matrizes elementares P_{ij} e $D_i(\beta)$, onde $\beta \neq 0$, são invertíveis e tem-se

$$P_{ij}^{-1} = P_{ij} \text{ e } (D_i(\beta))^{-1} = D_i(1/\beta).$$

55. Que mudança se dá em A^{-1} se em A

(a) trocarmos as linhas i e j ? (Generalize para o caso em que se faz uma permutação qualquer às linhas de A).

(b) multiplicarmos a linha i por um número $\alpha \neq 0$?

(c) à linha i adicionarmos a linha j multiplicada por um número α?

56. O mesmo que o exercício 55 com colunas em vez de linhas.

57. Considere as matrizes

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix} \text{ e } L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 1 & 0 \\ d & e & f & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Decomponha, de várias maneiras diferentes, L_1 e L_2 como produto de matrizes triangulares inferiores elementares.

(b) Use a alínea anterior para escrever L_1^{-1} e L_2^{-1} como produto de matrizes triangulares inferiores elementares.

(c) Calcule L_1^{-1} e L_2^{-1}.

(d) Decomponha L_1^{-1} e L_2^{-1} como produto de matrizes triangulares inferiores elementares cujos α's sejam os elementos das matrizes L_1^{-1} e L_2^{-1} obtidas em (c). Observe que não existe uma expressão simples para obter L_1^{-1} e L_2^{-1} a partir dos elementos de L_1 e L_2, respectivamente.

58. Ache as decomposições LU e LDU das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 12 & 18 \\ 5 & 18 & 30 \end{bmatrix}$;

(e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$; (f) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{bmatrix}$.

Que relação nota entre os factores triangulares da decomposição LDU nas alíneas (d) e (e) ?