Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Licenciatura em Matemática

Ano lectivo 2005/2006 Folha 5

50. Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $i > j$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Mostre que $E_{ij}(\alpha)A$ é a matriz que se obtém de A adicionando à linha i a linha j previamente multiplicada por α. Deduza que $E_{ij}(\alpha)E_{ij}(-\alpha) = I_m$ e conclua que $E_{ij}(\alpha)$ é invertível com inversa $(E_{ij}(\alpha))^{-1} = E_{ij}(-\alpha)$.

51. Considere as matrizes 3×3

$$E_{21}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{31}(\beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{32}(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \gamma & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule os produtos

$$E_{21}(\alpha)E_{31}(\beta), \quad E_{31}(\beta)E_{21}(\alpha), \quad E_{21}(\alpha)E_{32}(\gamma), \quad E_{32}(\gamma)E_{21}(\alpha),$$

$$E_{31}(\beta)E_{32}(\gamma), \quad E_{32}(\gamma)E_{31}(\beta), \quad E_{21}(\alpha)E_{31}(\beta)E_{32}(\gamma) \quad \text{e} \quad E_{32}(\gamma)E_{31}(\beta)E_{21}(\alpha).$$

O que é que observa em cada um deles? Procure generalizar essa observação para matrizes $n\times n$.

52. Que mudança se dá no produto AB das matrizes A e B se:

(a) trocarmos as linhas i e j de A ? Efectuarmos uma permutação nas linhas de A ?

(b) trocarmos as colunas i e j de B ? Efectuarmos uma permutação nas colunas de B ?

53. Indique que efeito tem numa matriz A

(a) a multiplicação à esquerda de A por uma matriz de permutação;

(b) a multiplicação à direita de A por uma matriz de permutação.

54. Verifique que $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 \\ -\beta & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a inversa de $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

55. Verifique que $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 \\ -\beta & -\gamma & 1 \end{bmatrix}$ <u>não é</u> a inversa de $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \beta & \gamma & 1 \end{bmatrix}$.

56. Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcule A^{-1}.

57. Prove que as matrizes elementares P_{ij} e $D_i(\beta)$, onde $\beta \neq 0$, são invertíveis e tem-se

$$P_{ij}^{-1} = P_{ij} \;\text{ e }\; (D_i(\beta))^{-1} = D_i(1/\beta).$$

58. Que mudança se dá em A^{-1} se em A

(a) trocarmos as linhas i e j? (generalize para o caso duma permutação qualquer).

(b) multiplicarmos a linha i por um número $\alpha \neq 0$?

(c) à linha i adicionarmos a linha j multiplicada por um número α?

59. O mesmo que o exercício 58 com colunas em vez de linhas.

60. Ache as decomposições LU e LDU das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 12 & 18 \\ 5 & 18 & 30 \end{bmatrix}$;

(e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$; (f) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{bmatrix}$.

Que relação nota entre os factores triangulares da decomposição LDU nas alíneas (d) e (e) ?

61. Mediante a resolução de sistemas triangulares resolva os sistemas $Ax = b_1$ e $Ax = b_2$ onde,

(a) A é a matriz da alínea (c) do exercício anterior, $b_1 = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 1 \end{bmatrix}^T$ e $b_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$;

(b) A é a matriz da alínea (e) do exercício anterior, $b_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ e $b_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T$;

(c) A é a matriz da alínea (f) do exercício anterior, $b_1 = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 8-4 \end{bmatrix}^T$ e $b_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}^T$.

62. Sendo A quadrada não singular, mostre que a matriz D nas decomposições LDU de A e A^T é a mesma. (Por outras palavras, A e A^T têm os mesmos pivots.)

63. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Determine a decomposição LU de A.

(b) Determine a matriz inversa de L e a matriz inversa de U.

(Sugestão: Escreva as matrizes L e U como produto de matrizes elementares.)

(c) Usando os resultados obtidos na alínea anterior calcule A^{-1}.

64. Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 \\ 1 & 8 & 8 \end{bmatrix}$, determine uma matriz de permutação P para a qual exista a decomposição LU de PA e determine os factores dessa decomposição.

65. Determine as decomposições $PA = LDU$ sendo:

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; (c) $A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$, $a, c, d \neq 0$.