Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Licenciatura em Matemática

Ano lectivo 2003/2004 Folha 6

72. Ache as inversas das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$.

73. Recorde que, se uma matriz é invertível, então pode escrever-se como um produto de matrizes elementares, matrizes de permutação e matrizes diagonais não-singulares. Escreva nessa forma as matrizes do exercício 72.

74. Seja $A = LDU$ com D diagonal não-singular e L e U triangulares (resp. inferior e superior) de elementos diagonais iguais a 1. Prove que, se A for simétrica, então $U = L^T$. (Portanto, conclui-se que para matrizes não-singulares simétricas, a eliminação é mais simples.) [**Sugestão**: Transponha ambos os membros da igualdade $A = LDU$ e use a unicidade da factorização LDU de A.]

75. Efectue a factorização LDL^T das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 3 \\ 4 & 15 & 25 & 10 \\ 7 & 25 & 39 & 22 \\ 3 & 10 & 22 & 5 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 9 \\ 4 & 9 & 7 \end{bmatrix}$.

76. Calcule os seguintes determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 0 & i & 1 & 0 \\ i & 0 & 0 & 1 \\ 1+i & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & i & 0 \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} x & y & 1 & x+y \\ y & x+y & 0 & x \\ x+y & x & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

77. Resolva as seguintes equações polinomiais:

(a) $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 2 & 1 \\ -1 & 1 & x & 0 \end{vmatrix} = 0$

78. Sabendo que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 12$, calcule os seguintes determinantes:

$$\text{(a)}\begin{vmatrix} 10 & 20 & 40 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{(b)}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 18 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} \qquad \text{(c)}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 2 & 2 & 10 \end{vmatrix}$$

79. Utilize propriedades dos determinantes para provar que

$$\text{(a)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(b)}\begin{vmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{vmatrix} = 0.$$

80. Sendo A uma matriz $n \times n$, qual é a relação com $\det(A)$ de
    (a) $\det(2A)$? (b) $\det(-A)$?

81. Verifique as seguintes igualdades:

$$\text{(a)}\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b'+c' & c'+a' & a'+b' \\ b''+c'' & c''+a'' & a''+b'' \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

$$\text{(b)}\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a+1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ a & a+1 & a+2 & 3 & 3 & 3 \\ a & a+1 & a+2 & a+3 & 4 & 4 \\ a & a+1 & a+2 & a+3 & a+4 & 5 \\ a & a+1 & a+2 & a+3 & a+4 & a+5 \end{vmatrix} = a^6.$$

82. (a) Sejam x_1, x_2, x_3, $x_4 \in \mathbb{R}$. Mostre que

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3).$$

(b) Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Mostre, por indução, que

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j).$$

O determinante acima é chamado determinante de Vandermonde de ordem n.

83. Considere a matriz real

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & \mu & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \mu & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

com $\mu \in \mathbb{R}$. Determine os valores do parâmetro real μ para os quais a matriz C tem característica igual a quatro.