Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Licenciatura em Matemática

Ano lectivo 2003/2004 Folha 7

84. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

    (a) Diga para que valores do parâmetro real α a matriz A é invertível.

    (b) Para os valores de α encontrados na alínea anterior determine a inversa de A.

85. Dê exemplos de matrizes A e B que verificam $\det(A+B) \neq \det A + \det B$.

86. Seja M uma matriz invertível 4×4. Determine uma matriz B tal que $\det(M+B) = 0 = \det(M) + \det(B)$.

87. Uma matriz A diz-se ortogonal se $AA^T = I$. Se A for ortogonal mostre que $|\det A| = 1$. Dê um exemplo de uma matriz ortogonal tal que $\det A = -1$.

88. Duas matrizes A e B dizem-se semelhantes se existir T invertível tal que $A = TBT^{-1}$. Prove que se A e B forem semelhantes então $\det A = \det B$.

89. Calcule a matriz adjunta da matriz real $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 4 & 9 & 8 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e a partir desta a sua inversa.

90. Seja A uma matriz $n \times n$ invertível.

    (a) Relacione o determinante da inversa de A com o determinante de A.

    (b) Relacione o determinante da adjunta de A com o determinante de A.

91. Considere a matriz real

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & \beta \end{bmatrix},$$

em que α e β são dois parâmetros reais. Determine, justificando, os valores de α e β para os quais o sistema $Ax = b$, com $b = [1\ 1\ 1]^T$, é possível determinado.

92. Usando a Regra de Cramer resolva os seguintes sistemas de equações:

(a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - y - 2z = 0 \\ -x - y + 3z = 1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 3x + y + z + t = 0 \\ 2x - y + 2t = 1 \\ x + y - 2z - t = -3 \\ 3x - y + 5z = 5 \end{cases}$

93. Diga quais dos seguintes subconjuntos são subespaços de $\mathbb{R}^4$:

(a) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 + x_2 = 0 \ \text{ e } x_3 = x_4\}$;

(b) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 + x_2 + x_3 = 0$ e x_4 é um inteiro não nulo$\}$;

(c) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \ x_2 = 0\}$;

(d) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1\}$.

94. Diga quais dos seguintes subconjuntos são subespaços de $\mathbb{R}^n$:

    (a) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0\}$;

    (b) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 x_2 = 0\}$;

    (c) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + 3x_2 = x_3\}$;

    (d) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_2$ é racional$\}$.

95. Considere-se o subconjunto de $\mathbb{R}^3$

$$E_\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = \alpha\}, \quad \text{com } \alpha \in \mathbb{R}.$$

    Mostre que E_α é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ se e só se $\alpha = 0$.

96. Considere os conjuntos $M = \{(\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ e $N = \{(\alpha, 2\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

    (a) Prove que M e N são subespaços de $\mathbb{R}^2$.

    (b) Determine $M \cup N$ e $M \cap N$.

    (c) Para cada um desses conjuntos, diga se é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

97. Prove que a reunião de dois subespaços de $\mathbb{R}^n$ só é um subespaço se um deles contiver o outro.

98. Sejam $A_{m\times n}$ e $B_{p\times m}$ duas matrizes reais quaisquer. Prove que:

    (a) O espaço nulo de A está contido no espaço nulo de BA.

    (b) O espaço nulo de A coincide com o de $A^T A$.

99. Sejam S e T subconjuntos finitos não vazios de $\mathbb{R}^n$. Prove que:
    (a) $S \subseteq T \Rightarrow \mathcal{L}(S) \subseteq \mathcal{L}(T)$; (b) $S \subseteq T \subseteq \mathcal{L}(S) \ \Rightarrow \ \mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(T)$.

100. Escreva o vector $(2, -3)$ de $\mathbb{R}^2$ como combinação linear dos vectores:
    (a) $(1, 0)$ e $(0, 1)$; (b) $(1, 1)$ e $(1, 2)$; (c) $(0, 1)$ e $(2, -3)$.

101. Diga se o vector $(1, 3)$ pertence ao subespaço de $\mathbb{R}^2$ gerado pelos vectores $(0, 1)$ e $(1, 1)$. Visualize geometricamente.

102. Diga se o vector $(2, 5, -3)$ pertence ao subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $(1, 4, -2)$ e $(-2, 1, 3)$.

103. Considere os seguintes vectores de $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (1, 0, 2), \quad v_2 = (1, -1, 1), \quad v_3 = (0, -1, -1), \quad v_4 = (1, \frac{-1}{2}, \frac{3}{2}).$$

    Prove que o subespaço gerado por v_1 e v_2 coincide com o subespaço gerado por v_3 e v_4.

104. Descreva geometricamente o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por:

    (a) $(0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 2, 0)$;

    (b) $(0, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 2, 1)$;

    (c) os seis vectores indicados em (a) e (b).