Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Licenciatura em Matemática

Ano lectivo 2003/2004 Folha 9

127. Considere os vectores $v_1 = (2, -3, 1)$, $v_2 = (0, 1, 2)$ e $v_3 = (1, 1, -2)$ de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Mostre que os vectores v_1, v_2 e v_3 constituem uma base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Determine as coordenadas do vector $(3, 2, 1)$ relativamente à base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

128. Mostre que os vectores (a, b) e (c, d) constituem uma base de $\mathbb{R}^2$ se e só se $ad - bc \neq 0$.

129. Seja $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de $\mathbb{R}^n$ e u um vector não nulo de $\mathbb{R}^n$. Prove que existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $(B \setminus \{v_k\}) \cup \{u\}$ é uma base de V.

   Sugestão: Escreva $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ (porque o pode fazer?) e escolha k tal que $\alpha_k \neq 0$ (porque é que existe pelo menos um tal k?)

130. Determine a dimensão e indique duas bases diferentes para o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $(1, 2, 3), (4, 5, 6)$ e $(7, 8, 9)$.

131. Para cada um dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, prove que se trata de um subespaço, determine a sua dimensão e indique uma base:

   (a) o conjunto dos vectores com a primeira e a última coordenadas iguais;

   (b) o conjunto dos vectores cujas coordenadas de índice par são nulas;

   (c) o conjunto dos vectores cujas coordenadas de índice par são todas iguais;

   (d) o conjunto dos vectores da forma $(\alpha, \beta, \alpha, \beta, \alpha, \beta, \ldots)$.

132. Seja F um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Prove que:

   (a) $\dim F \leq \dim \mathbb{R}^n$.

   (b) $\dim F = \dim \mathbb{R}^n$ se e só se $F = \mathbb{R}^n$.

133. Sendo $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais não todos nulos, determine a dimensão e indique uma base do subespaço de $\mathbb{R}^n$ definido pela equação $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$.

134. Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$.

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_3 \text{ e } x_4 = 2x_2\}, \quad G = \mathcal{L}\{(1, 0, 1, 0), (0, 2, 0, 1), (-1, 2, -1, 1)\}.$$

   Determine a dimensão e indique uma base para F, G e $F \cap G$.

135. Prove que, se F e G forem subespaços de dimensão 3 de $\mathbb{R}^5$, então têm de certeza pelo menos um vector não nulo em comum. (Sugestão: Se reunir uma base de F com uma de G, fica com seis vectores).

136. Determine a característica e o espaço nulo das matrizes $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

137. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & 2 \\ \alpha & -1 & 3\alpha - 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

onde α é um parâmetro real. Determine para que valores de α a característica de A é, respectivamente, 1, 2 e 3. Em cada caso, determine bases para o espaço das colunas, das linhas e para o espaço nulo de A.

138. O mesmo que no exercício anterior para a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2\alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$.

139. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -1 & 1 & \alpha \\ -\alpha & \alpha & -1 & 0 \\ \alpha^2 & -1 & 1 & \alpha^2 \end{bmatrix}, \quad \text{com } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Diga para que valores de α o espaço das colunas de A coincide com $\mathbb{R}^3$.

140. Considere os vectores $(1, \alpha, 1), (1, \alpha - 1, 1), (1, \alpha + 1, 1)$ e $(\alpha, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$. Determine os valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para os quais o subespaço gerado por estes quatro vectores tem dimensão 2.

141. Construa uma matriz cujo espaço nulo seja gerado pelo vector $(1, 0, 1)$.

142. Existirá uma matriz cujo espaço das linhas contenha o vector $(1, 1, 1)$ e cujo espaço nulo contenha o vector $(1, 0, 0)$?

143. Se A for uma matriz 64×17 com característica 11, quantos vectores linearmente independentes satisfazem $Ax = 0$? E quantos vectores linearmente independentes satisfazem $A^T y = 0$?

144. (a) Sendo A uma matriz qualquer, prove que $\text{car}(A) = \text{car}(A^T)$.
   (b) Será sempre verdade que $\text{nul}(A) = \text{nul}(A^T)$?

145. Sendo A $m \times n$ e B $p \times m$, prove que:
   (a) $\text{car}(BA) \leq \text{car}(B)$; (b) $\text{nul}(A) \leq \text{nul}(BA)$;
   (c) $\text{car}(BA) \leq \text{car}(A)$ (por dois processos: i) usando (b); ii) usando (a)).

146. Sendo A $m \times n$, real prove que:
   (a) $\text{nul}(A^T A) = \text{nul}(A)$; (b) $\text{car}(A^T A) = \text{car}(AA^T) = \text{car}(A)$.

147. Seja A $m \times n$ qualquer. Sejam B $m \times m$ e C $n \times n$ <u>invertíveis</u>. Prove que:
   (a) $\text{car}(BA) = \text{car}(A)$; (b) $\text{car}(AC) = \text{car}(A)$; (c) $\text{car}(BAC) = \text{car}(A)$.

148. Sendo A $n \times n$, diga se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação geral: Se as colunas de A forem linearmente independentes, o mesmo acontece às colunas de A^2.

149. Seja A $n \times n$. Prove que, se $A^2 = A$ e $\text{car}(A) = n$, então $A = I$.