Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Licenciatura em Matemática

Ano lectivo 2005/2006 Folha 9

107. Considere os seguintes vectores de $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (1, 0, 2), \quad v_2 = (1, -1, 1), \quad v_3 = (0, -1, -1), \quad v_4 = (1, -1/2, 3/2).$$

Prove que o subespaço gerado por v_1 e v_2 coincide com o subespaço gerado por v_3 e v_4.

108. Descreva geometricamente o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por:

(a) $(0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 2, 0)$;

(b) $(0, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 2, 1)$;

(c) os seis vectores indicados em (a) e (b).

109. Considere os seguintes vectores de $\mathbb{R}^4$:

$$a = (1, -1, 1, -1), \quad b = (1, 2, 3, 4), \quad c = (2, 1, 0, 3), \quad d = (0, -3, -2, -5).$$

Seja F o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por a e b. Averigúe se c e d são elementos de F.

110. Determine α e β de modo que o vector $(1, 1, \alpha, \beta)$ pertença ao subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vectores $(1, 0, 2, 1)$ e $(1, -1, 2, 2)$.

111. Sendo A uma matriz do tipo $m \times n$, mostre que o espaço das colunas de A é o conjunto

$$\{Av \mid v \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})\}.$$

112. Prove que o espaço das colunas de BA está contido no de B.

113. Suponha que os vectores $v_1, v_2, \ldots, v_k$ geram um subespaço F e que um deles, digamos v_i, é combinação linear dos $k-1$ restantes. Mostre que, então os vectores $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k$ geram F. (Ou seja, para o efeito de gerar F, v_i é redundante).

114. Sejam u, v e w vectores de $\mathbb{R}^n$. Prove que, se existirem escalares α, β e γ (com α e γ não nulos) tais que $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$, então $\mathscr{L}(u, v) = \mathscr{L}(v, w)$.

115. Indique um conjunto gerador para o subespaço de $\mathbb{R}^3$

$$\mathscr{L}((2, 3, -1), (1, -1, -2)) \cap \mathscr{L}((0, 0, 1), (1, -1, -2)).$$

116. Escreva o vector nulo de $\mathbb{R}^2$ como combinação linear dos vectores $(2, -3)$ e $(-4, 6)$ de várias maneiras diferentes. Pode o vector nulo de $\mathbb{R}^2$ escrever-se como combinação linear dos vectores $(2, -3)$ e $(4, 6)$ de mais que uma maneira?

117. Diga quais dos seguintes conjuntos de vectores de $\mathbb{R}^3$ são linearmente independentes (e no caso de dependência escreva um dos vectores como combinação linear dos outros):

(a) $\{(1, -2, 3), (3, -6, 9)\}$;

(b) $\{(1, -2, -3), (3, 2, 1)\}$;

(c) $\{(0, 1, -2), (1, -1, 1), (1, 2, 1)\}$;

(d) $\{(0, 2, -4), (1, -2, -1), (1, -4, 3)\}$;

(e) $\{(1, -1, -1), (2, 3, 1), (-1, 4, -2), (3, 1, 2)\}$.

118. Considere os seguintes vectores de $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = (1,0,1,0), \quad v_2 = (1,-1,1,-1), \quad v_3 = (-2,0,1,2) \quad \text{e} \quad v_4 = (3,-1,3,-1).$$

(a) Mostre que v_1, v_2, v_3 são linearmente independentes.

(b) Mostre que v_1, v_2, v_4 são linearmente dependentes.

119. Discuta, segundo os valores de μ, a dependência ou independência linear dos seguintes vectores de $\mathbb{R}^4$: $v_1 = (1,-2,-5,8)$, $v_2 = (-1,1,1,5)$ e $v_3 = (1,2,11,\mu)$.

120. Diga para que valores de α, β e γ os vectores $(0,\gamma,-\beta)$, $(-\gamma,0,\alpha)$, $(\beta,-\alpha,0)$ são linearmente independentes.

121. Dados os vectores $u = (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)$, $v = (b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)$, $w = (c_1,c_2,c_3,c_4,c_5)$ de $\mathbb{R}^5$, considerem-se os vectores $u' = (a_1,a_2,a_3)$, $v' = (b_1,b_2,b_3)$, $w' = (c_1,c_2,c_3)$ de $\mathbb{R}^3$. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações:

(a) Se u', v', w' são linearmente independentes, então u, v, w também o são.

(b) Se u', v', w' são linearmente dependentes, então u, v, w também o são.

122. Sejam v_1, v_2, v_3 vectores linearmente independentes de $\mathbb{R}^n$. Diga se é linearmente independente cada um dos seguintes conjuntos de vectores:
(a) $\{v_1, v_1+v_2, v_1+v_2+v_3\}$; (b) $\{v_1+v_2, v_2+v_3, v_3+v_1\}$; (c) $\{v_1-v_2, v_2-v_3, v_3-v_1\}$.

123. Sejam F e G subespaços de $\mathbb{R}^n$ tais que $F \cap G = \{0\}$. Prove que, sendo $0 \neq x \in F$ e $0 \neq y \in G$, os vectores x e y são linearmente independentes.

124. Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vectores de $\mathbb{R}^n$ e suponha que um vector u é combinação linear deles. Prove que, se os vectores $v_1, v_2, \ldots, v_k$ forem linearmente independentes, os coeficientes dessa combinação linear são univocamente determinados por u (isto é, u não se pode escrever como combinação linear desses vectores de mais de uma maneira). Reciprocamente, prove que, se u se escreve como combinação linear deles de uma única maneira, então $v_1, v_2, \ldots, v_k$ são linearmente independentes.

125. Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vectores linearmente independentes de $\mathbb{R}^n$ e w um vector que não é combinação linear deles. Prove que os $k+1$ vectores $v_1, v_2, \ldots, v_k$, w são linearmente independentes.

126. Prove que a dependência ou independência linear de um conjunto de vectores não se altera se trocarmos entre si dois vectores do conjunto; ou se multiplicarmos um dos vectores do conjunto por um escalar não nulo; ou se somarmos a um dos vectores outro do conjunto multiplicado por um escalar.

127. Seja $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0\}$.

(a) Prove que S é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(b) Determine um conjunto gerador de S.

(c) Averigúe se o conjunto encontrado na alínea (b) é linearmente independente.

(d) Indique a dimensão e uma base de S.