Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

# Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Ano lectivo 2005/2006 – 2ª **Frequência** – **25/05/2006** – 1h 15 m de duração

Licenciatura em Matemática

---

Não é permitido qualquer tipo de consulta. Justifique brevemente as suas respostas e indique todos os cálculos que efectuou.

---

1. Considere a seguinte matriz real

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 & 2 \\ -1 & 2 & \lambda & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Diga para que valores de $\lambda$ é que $N(A)$ (o espaço nulo de $A$) tem dimensão 2.

   (b) Para esses valores de $\lambda$, determine uma base de $\mathbb{R}^4$ que contenha uma base de $N(A)$.

   (c) Usando a alínea anterior determine, para os mesmos valores de $\lambda$, uma matriz $B$ tal que

$$\mathbb{R}^4 = N(A) \oplus N(B).$$

   (ou diga como procederia, se não tiver resolvido a alínea anterior)

   (d) Considere $\lambda = 1$.

      i. Determine a solução no sentido dos mínimos quadrados do sistema $Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$.

      ii. Qual é o vector de $C(A)$ que está mais próximo do vector $(1, 1, 0)$?

2. Para cada uma das seguintes afirmações diga, justificando, se é verdadeira ou falsa.

   (a) Sejam $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ tais que $\dim \mathscr{L}\{u, v\} = \dim \mathscr{L}\{u, w\} = \dim \mathscr{L}\{v, w\} = 2$, então $\mathscr{L}\{u, v, w\} = \mathbb{R}^3$.

   (b) Sejam $A$ e $B$ matrizes quadradas de ordem $n$, se $AB = BA$ então $N(B) + N(A) \subseteq N(BA)$.

   (c) Sejam $v_1, \ldots, v_m$ vectores ortonormados de $\mathbb{R}^n$, então $\dim \mathscr{L}\{v_1, \ldots, v_m\} = m$.

   (d) Seja $A$ uma matriz. Se $u$ é uma solução no sentido dos mínimos quadrado do sistema impossível $Ax = b$ então $Au - b$ pertence a $C(A)^\perp$.

3. (a) Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_r \in \mathbb{R}^n$ e $A$ uma matriz $m \times n$. Prove que se $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ é linearmente independente e $\text{car}(A) = n$ então $\{Av_1, Av_2, \ldots, Av_r\}$ é linearmente independente.

   (b) Dê um exemplo de dois vectores $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ e uma matriz $A$, não nula, $3 \times 2$, tais que $\{v_1, v_2\}$ é linearmente independente mas $\{Av_1, Av_2\}$ é linearmente dependente.