Complementos de Álgebra Linear e Geometria Analítica

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Licenciatura em Tecnologias de Informação Visual

Ano lectivo 2005/2006 Folha 1

1. Determine os valores próprios de cada uma das seguintes matrizes.

(a) $\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

(i) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (j) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 8 \end{bmatrix}$ (k) $\begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ 1-i & -1 & -2 & 2 \\ -\frac{1}{2}+i & \frac{1}{2}+i & 1+i & -1 \\ 0 & 2i & 2i & -i \end{bmatrix}$.

2. Determine os valores próprios e vectores próprios das seguintes matrizes em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{C}$:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$;

(d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; (e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; (f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

3. Comparando os respectivos polinómios característicos, prove que A e $A^\top$ têm os mesmos valores próprios.

4. Dê exemplos que mostrem que os valores próprios de uma matriz podem mudar

   (a) quando se subtrai de uma linha um múltiplo de outra linha;

   (b) quando se trocam duas linhas.

   Observação: Note-se que deste exercício concluímos que para calcular os valores próprios de uma matriz não se pode aplicar o método de eliminação de Gauss à matriz.

5. Suponhamos que A tem os valores próprios $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Prove que, então, $\mu_1^2, \ldots, \mu_n^2$ são valores próprios de A^2 e que qualquer vector próprio de A é também vector próprio de A^2. Generalize para qualquer potência de A.

6. Sendo A uma matriz $n \times n$, prove que o determinante de A é igual ao produto dos valores próprios de A. (**Sugestão:** O polinómio característico de A é igual a $\det(A - \lambda I)$ e, por outro lado, designando por $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ os valores próprios de A, é igual a $(-1)^n(\lambda - \alpha_1)\ldots(\lambda - \alpha_n)$).

7. Para cada uma das matrizes do exercício 1, determine os subespaços próprios indicando uma base de cada um deles. Diga se é ou não diagonalizável. Determine em caso afirmativo uma matriz diagonalizante.

8. Considere a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine os valores próprios de A.

   (b) Determine um vector próprio de A, associado ao valor próprio 0.

   (c) Diga se A é diagonalizável e, em caso afirmativo, indique duas matrizes diagonalizantes diferentes.

9. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine os valores próprios de A.

   (b) Determine os vectores próprios de A e diagonalize A.

   (c) Usando o resultado da alínea (b), determine A^{2005}.

   (d) Calcule uma matriz B solução da equação matricial $B^3 = A$.

10. Determine

    (a) $\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}^{2005}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{2005}$.

11. Considere a matriz real $A = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 9 & -5 \end{bmatrix}$.

    (a) Calcule os valores próprios de A.

    (b) Sem calcular os vectores próprios de A, mostre que A não é diagonalizável.

12. Determine a solução geral do sistema linear de equações diferenciais

$$f_1'(t) = 5f_1(t) + 3f_2(t)$$
$$f_2'(t) = -6f_1(t) - 4f_2(t).$$

13. Determine a solução do sistema linear de equações diferenciais

$$f_1'(t) = 2f_1(t) - 3f_2(t)$$
$$f_2'(t) = 4f_1(t) - 5f_2(t),$$

    sabendo que $f_1(0) = 7$ e $f_2(0) = 13$.