Complementos de Álgebra Linear e Geometria Analítica

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Licenciatura em Tecnologias de Informação Visual

Ano lectivo 2005/2006 Folha 2

14. Indique pares de vectores ortogonais entre si, de entre as escolhas

$$u = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad w = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Diga, se a matriz Q (quadrada, de ordem 3, formada pelas colunas u, v e w) é ortogonal.

15. Para cada uma das seguintes matrizes simétricas reais A, determine uma matriz ortogonal Q tal que $Q^\top AQ$ seja diagonal:

(a) $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

16. Coloque em forma matricial a seguinte expressão quadrática:

$$x^2 + 4xy - x + y - 5.$$

17. Para cada uma das seguintes formas quadráticas em $\mathbb{R}^2$, determine uma mudança ortogonal de coordenadas que a transforme numa forma quadrática diagonal.

(a) $f(x, y) = 2x^2 + xy + 2y^2$ (b) $f(x, y) = x^2 - 4xy - 2y^2$ (c) $f(x, y) = 3xy$

Em cada alínea, identifique a figura geométrica de equação $f(x, y) = 1$.

18. Mesmo exercício que o anterior para as seguintes formas quadráticas em $\mathbb{R}^3$.

(a) $f(x, y, z) = 7x^2 + 4xy + 6y^2 + 4yz + 5z^2$ (b) $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + 6yz - z^2$

19. Esboce a figura geométrica do plano real $\mathbb{R}^2$ dada por cada uma das seguintes equações quadráticas.

(a) $3x^2 + 2xy + 3y^2 - \sqrt{2}x = 0$; (b) $4x^2 + 4xy + y^2 - x = 0$;
(c) $xy + x + y = 0$; (d) $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$;
(e) $3x^2 - 4\sqrt{3}xy - y^2 + 20y - 25 = 0$; (f) $4xy + 3y^2 + 2\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y = 0$;
(g) $x^2 + y^2 - 3x - 3y + xy = 0$; (h) $xy - 2x - 4 = 0$;
(i) $x^2 - 2x + 1 = 0$; (j) $x^2 + y^2 - xy - 3 = 0$;
(k) $4x^2 + 4xy + y^2 - 4y - 9x + 4 = 0$.

20. Para cada matriz A das alíneas (b) a (e) do exercício 15 descreva a figura geométrica formada pelo conjunto dos pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que satisfazem a equação:

(i) $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ (ii) $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 5$

21. Identifique a figura geométrica do espaço real $\mathbb{R}^3$ dada por cada uma das seguintes equações quadráticas.

(a) $-5y^2 + 2xy - 8xz + 2yz = 0$; (b) $y^2 + 2z^2 + 2\sqrt{3}yz = 0$;
(c) $x^2 + y^2 - 1 = 0$; (d) $x^2 + y^2 + z^2 = -1$;
(e) $9x^2 + 16y^2 + 25z^2 + 24xy - 40x + 30y = 0$; (f) $3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz = 2$;
(g) $x^2 + 2xy + y^2 = 0$; (h) $y^2 + 3y + 2 = 0$;
(i) $y^2 + 2z^2 + 2\sqrt{3}yz = 0$.

22. Sejam $U_1, \ldots, U_m$ matrizes unitárias em $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ (com m um número inteiro positivo). Prove que o seu produto $U = U_1 \cdots U_m$ é, também, uma matriz unitária.

23. Seja U uma matriz unitária em $M_{n_2\times n_2}(\mathbb{C})$. Mostre que também é unitária a matriz

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix},$$

em que I é a matriz identidade de $M_{n_1\times n_1}(\mathbb{C})$ (e n_1 e n_2 números inteiros positivos).

24. Dos dois exercícios anteriores conclua que a matriz U da demonstração do teorema de Schur é unitária.

25. Mostre que se $U \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ for uma matriz unitária então também são unitárias as matrizes $\bar{U}$, $U^\top$ e U^*.

26. Demonstre que se $U \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ for uma matriz unitária então [x e y são ortogonais se e só se Ux e Uy são ortogonais, quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{C}^n$].

27. Utilizando as propriedades dos determinantes, mostre que o módulo do determinante de uma matriz unitária vale sempre um.

28. Utilizando as propriedades dos determinantes, prove que duas matrizes unitariamente semelhantes têm os mesmos valores próprios.

29. Classifique as seguintes matrizes, indicando quais são: simétricas; hermíticas; ortogonais; unitárias; normais.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}i & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$.

30. Considere $A = UDU^*$, em que todas as matrizes são quadradas e com elementos em $\mathbb{C}$. A matriz D é diagonal e a matriz U é unitária. Mostre que A é normal.