Complementos de Álgebra Linear e Geometria Analítica

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Licenciatura em Tecnologias de Informação Visual

Ano lectivo 2005/2006 Folha 3

31. Considere a seguinte matriz em $M_{3\times 3}(\mathbb{C})$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

em que a_{31} é um parâmetro complexo.

   (a) Indique, se possível, valores para a_{31} de forma a que A seja: simétrica; hermítica; ortogonal; unitária; normal.

   (b) Faça $a_{31} = 0$. Indique os valores próprios de A.

   (c) A matriz A é diagonalizável (com $a_{31} = 0$)?

32. Prove que se A for hermítica (respectivamente hemi-hermítica) então iA é hemi-hermítica (respectivamente hermítica).

33. Mostre que a matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ é normal se e só se $\|Ax\| = \|A^*x\|$ para todo o $x \in \mathbb{C}^n$. (As matrizes normais são aquelas em que A e A^* preservam distâncias entre si.)

34. Mostre que a matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ é normal se e só se $(Ax)^*(Ax) = (A^*x)^*(A^*x)$ para todo o $x \in \mathbb{C}^n$. (As matrizes normais são aquelas em que A e A^* preservam ângulos entre si.)

35. Prove que se $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ for uma matriz normal então

$$Ax = 0 \quad \text{se e só se} \quad A^*x = 0.$$

(Quando A é normal o seu espaço nulo coincide com o da sua adjunta.)

Mostre, ainda, que este resultado não é verdadeiro para qualquer matriz, recorrendo a

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

36. Escreva a matriz de permutação de deslocamento inferior C, quando $n = 6$. Classifique esta matriz, indicando se é: simétrica, hermítica; ortogonal; unitária; normal; circulante. Escreva C^3 sem efectuar quaisquer cálculos.

37. Identifique a matriz de permutação de deslocamento superior e mostre o seu efeito quando multiplica, à esquerda, um vector de dimensão apropriada.

38. Escreva a matriz da transformada discreta de Fourier F, quando $n = 6$, em termos de $w = e^{i\pi/3}$ e das suas potências (w^0, w^1, w^2, w^3, w^4 e w^5).

39. Considere a seguinte matriz em $M_{3\times 3}(\mathbb{C})$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Classifique esta matriz (indicando todas as propriedades matriciais conhecidas que ela satisfaça).

(b) Escreva esta matriz como uma combinação linear de C^0, C e C^2, em que C designa a matriz de permutação de deslocamento inferior de ordem 3.

(c) Indique os valores próprios de C em função de $w = e^{2\pi i/3}$.

(d) Indique os valores próprios de A em função de $w = e^{2\pi i/3}$.

40. Considere a seguinte matriz em $M_{3\times 3}(\mathbb{C})$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 1 & i & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Complete esta matriz de forma a ser circulante.

(b) Complete esta matriz de forma a ter valores próprios reais.

(c) Complete esta matriz de forma a ser unitariamente diagonalizável.

(d) No caso da alínea (a), escreva a matriz na forma $[\,h \ \ C^7h \ \ C^5h\,]$, em que C é a matriz de permutação de deslocamento inferior de ordem 3 e h um vector em $\mathbb{C}^3$.

(e) Indique os valores próprios de C^5.

41. Escreva a matriz $U = (1/\sqrt{n})F$ quando $n = 4$, em que F é a matriz da TDF. Mostre que as suas segunda e terceira colunas são ortogonais.

42. Calcule os valores e vectores próprios da matriz C de PDI quando $n = 4$.

43. Considere a matriz circulante

$$H = \begin{bmatrix} d & -1 & 0 & -1 \\ -1 & d & -1 & 0 \\ 0 & -1 & d & -1 \\ -1 & 0 & -1 & d \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que os seus valores próprios são iguais a $d - 1 - 1 = d - 2$, $d - i - i^{-1} = d$, $d - i^2 - i^{-2} = d + 2$ e $d - i^3 - i^{-3} = d$.

(b) Verifica-se, assim, que os valores próprios de H são reais se d for um número real. Teria sido possível afirmar isto antes de ter calculado os valores próprios de H?

(c) Faça, agora, $d = 2$. Diga por que é que a matriz H é singular. Mostre que $[1\;1\;1\;1]^\top$ é um vector próprio de H associado ao valor próprio $\lambda = 0 = d - 2$.