Complementos de Álgebra Linear e Geometria Analítica

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Licenciatura em Tecnologias de Informação Visual

Ano lectivo 2005/2006 Folha 4

44. Calcule o volume do paralelipípedo definido por $(-3,2,1)$, $(1,0,-1)$ e $(3,3,-1)$.

45. Sendo v_1 e v_2 vectores de $\mathbb{R}^3$, e designando por A a matriz 3×2 cujas colunas são v_1 e v_2, mostre que a área do paralelogramo definido por v_1 e v_2 é igual a $\sqrt{\det(A^TA)}$.

46. Calcule a área do paralelogramo definido por $(-3,2,1)$ e $(1,0,-1)$.

47. Sendo v_1 e v_2 vectores de $\mathbb{R}^2$ (ou de $\mathbb{R}^3$), e designando por θ o ângulo entre eles, mostre que a área do paralelogramo definido por v_1 e v_2 é igual a $\|v_1\|\,\|v_2\|\,\mathrm{sen}\theta$.

48. Sendo $u=(2,-1,3), v=(0,1,7)$ e $w=(1,4,5)$, calcular:

    $v\wedge w$; $u\wedge(v\wedge w)$; $(u\wedge v)\wedge w$; $(u\wedge v)\wedge(v\wedge w)$;
    $u\wedge(v-2w)$; $(u\wedge v)-2w$

49. Em cada uma das alíneas ache um vector ortogonal aos dois vectores:

    (a) $u=(-7,3,1), v=(2,0,4)$ (b) $u=(-1,-1,-1), v=(2,0,2)$

50. Dados u,v,w em $\mathbb{R}^3$, mostre que o volume do paralelipípedo definido por u,v e w é igual a $|\langle u, v\wedge w\rangle|$.

51. Diga se os vectores $a=(1,6,4,4,-2)$ e $b=(1,6,5,4,-2)$ pertencem ao plano em $\mathbb{R}^5$ de equação $x=p+\alpha_1v_1+\alpha_2v_2$, onde $p=(2,3,-1,1,1)$, $v_1=(3,-1,1,-1,1)$ e $v_2=(-1,1,1,1,-1)$.

52. Para cada uma das seguintes rectas em $\mathbb{R}^4$, determine a sua posição em relação ao plano que passa por $(1,0,0,1)$ e é paralelo aos vectores $(5,2,-3,1)$, $(4,1,-1,0)$ e $(-1,2,-5,3)$

    (a) $x=(3,1,-4,1)+\alpha(-1,1,2,1),\quad \alpha\in\mathbb{R}$ (b) $x=(3,0,-4,1)+\alpha(-1,1,2,1),\quad \alpha\in\mathbb{R}$
    (c) $x=(-2,0,-1,2)+\alpha(1,1,-2,1),\quad \alpha\in\mathbb{R}$

NOTA: Os exercícios seguintes dizem todos respeito ao espaço $\mathbb{R}^3$. Neles usaremos a palavra "plano" para significar "plano de dimensão 2".

53. Determine equações paramétricas do plano que passa por $(1,1,0)$, $(6,0,-1)$ e $(3,0,0)$.

54. Determine equações paramétricas da recta que passa por $(3,1,-1)$ e tem a direcção de $(1,-1,2)$.

55. Determine equações paramétricas do plano que passa por $(1,2,2)$ e é paralelo às rectas

$$\begin{cases} x=1+2\alpha \\ y=-1-\alpha \\ z=-2\alpha \end{cases} \qquad \text{e} \qquad x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}.$$

56. Determine equações paramétricas da recta que passa por $(2,1,-3)$ e por $(4,0,-2)$.

57. Determine equações paramétricas do plano que passa por $(1,1,0)$ e $(1,-1,-1)$ e é paralelo a $(2,1,0)$.

58. Diga se existe um plano que contenha $(2,1,3),(0,3,9),(3,3,4)$ e $(7,5,0)$.

59. Mostre que a intersecção dos planos $\{(8,0,0)\}+\mathcal{L}\{(-4,1,0),(2,0,1)\}$ e $\mathcal{L}\{(1,0,-2),(0,1,1)\}$ é uma recta e determine equações paramétricas dessa recta.

60. Determine equações paramétricas do plano que contém $(1,0,0)$ e também contém a recta de equação $x=(0,1,0)+\alpha(0,1,-2), \alpha \in \mathbb{R}$.

61. Escreva uma equação cartesiana de cada um dos seguintes planos:

    (a) O plano que contém o ponto $(1,2,3)$ e é perpendicular ao vector $(-1,1,0)$.

    (b) O plano que contém os pontos $(2,1,3)$, $(-3,-1,3)$ e $(4,2,3)$.

    (c) O plano que contém o ponto $(6,0,-2)$ e é paralelo aos vectores $(1,0,0)$ e $(0,-2,1)$.

    (d) O plano que contém o ponto $(4,-1,2)$ e é paralelo ao plano $2x-3y-z=5$.

62. Dado o plano de equação cartesiana $3x-2y-z=6$, determine equações paramétricas desse plano.

63. (a) Considere o plano de equação cartesiana $ax+by+cz=d$. Qual é o significado geométrico da condição $c=0$?

    (b) Sejam dados m pontos. Como procederia para determinar o plano (não paralelo ao eixo dos zz) que melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, a esses m pontos?

64. Considere os seguintes vectores: $p=(1,0,0)$, $q=(0,1,0)$, $v=(0,1,-2)$. Determine:

    (a) Uma equação cartesiana do plano que contém p e é ortogonal a v.

    (b) Equações paramétricas do plano que contém p e também contém a recta de equação $x=q+\alpha v$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

65. Calcule a distância do ponto $b=(2,1,0)$ ao plano de equação $x+y-z=0$. Qual é o ponto desse plano que está mais próximo de b?

66. Considere o hiperplano em $\mathbb{R}^4$ $x=\{p\}+F$, onde $p=(0,0,-3,6)$ e F é gerado pelos vectores $(1,0,2,-2)$, $(0,1,-2,0)$ e $(2,1,6,-4)$.

    (a) Determine uma equação cartesiana deste hiperplano.

    (b) Calcule a distância de $x_0=(5,3,-1,-1)$ a esse hiperplano.

67. O ângulo entre dois planos $\langle u, x-p\rangle=0$ e $\langle v, x-q\rangle=0$ é o ângulo entre u e v (ou o suplementar desse, se ele não pertencer ao intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.)
    Calcule o ângulo entre os planos em $\mathbb{R}^3$ de equações $x+y+4z=1$ e $x-2y-2z=3$.

68. Determine equações cartesianas da recta em $\mathbb{R}^3$ que passa pelo ponto $(2,-1,4)$ e é perpendicular ao plano $x-3y+2z=1$.