# Complementos de Álgebra Linear e Geometria Analítica

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Licenciatura em Tecnologias de Informação Visual

Ano lectivo 2005/2006 Folha 5

69. Determine equações paramétricas da recta em $\mathbb{R}^3$ $\left\{\begin{array}{l} 2x - y - 3z = 5 \\ 2x + y = 2 \end{array}\right.$ .

70. Calcule a distância do ponto $x_0 = (2, 0, 7)$

    (a) à recta em $\mathbb{R}^3$ que passa pelo ponto $p = (0, 2, -3)$ e é paralela a $v = (2, 2, 1)$;

    (b) à recta em $\mathbb{R}^3$ de equações cartesianas $\left\{\begin{array}{l} 5x - 2y + z = -7 \\ 3x - 3y + z = -4 \end{array}\right.$ .

71. Dadas as rectas em $\mathbb{R}^3$ $\left\{\begin{array}{l} x = 3 + \alpha \\ y = \alpha \\ z = -1 - 2\alpha \end{array}\right.$ e $\left\{\begin{array}{l} 2x + y + 3z = 0 \\ x + 2y = 6 \end{array}\right.$

    (a) verifique que são concorrentes e determine o seu ponto de intersecção;

    (b) calcule o ângulo entre elas.

    **Nota**: O ângulo entre duas rectas $x = p + \alpha v$ e $x = q + \alpha w$ é o ângulo entre $v$ e $w$ (ou o suplementar desse).

72. Considere a recta $R$ em $\mathbb{R}^3$ definida pelas equações $\left\{\begin{array}{l} y - z = 0 \\ x - z = 2 \end{array}\right.$ e os planos $P_1$ e $P_2$ de equações cartesianas $x + y - z = 0$ e $x - y - 5 = 0$, respectivamente. Determine:

    (a) Equações paramétricas da recta paralela a $R$ e que passa pelo ponto $(1, 2, 3)$. Qual é a distância entre estas duas rectas?

    (b) Uma equação vectorial da recta que passa por $(1, 0, 1)$ e é paralela aos planos $P_1$ e $P_2$.

    (c) Uma equação cartesiana do plano ortogonal ao plano $P_1$ e que contém a recta $R$.

73. Considere as rectas $R_1$ e $R_2$ em $\mathbb{R}^3$ de equações $\left\{\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 - 2t \end{array}\right.$ , $t \in \mathbb{R}$ e $\left\{\begin{array}{l} x - y = 0 \\ y + z = 3 \end{array}\right.$ , respectivamente, e o plano $P$ de equação $x + y + 2z = 2$.

    (a) Determine a posição relativa de $R_1$ e $R_2$.

    (b) Determine uma equação cartesiana do plano que contém $R_1$ e $R_2$.

    (c) Determine uma equação cartesiana do plano perpendicular a $P$ e que contém $R_1$.

    (d) Calcule a distância entre $R_2$ e $P$.

74. Considere a recta $R_\alpha$ em $\mathbb{R}^3$ definida pelas equações $\left\{\begin{array}{l} x + (\alpha + 1)y = 0 \\ -x + y + z = 1 \end{array}\right.$ onde $\alpha$ é um parâmetro real.

(a) Escreva uma equação vectorial de $R_\alpha$.

(b) Determine $\alpha$ de forma que:

i. $R_\alpha$ seja perpendicular ao plano de equação $2y+2z=1$.

ii. $R_\alpha$ seja paralela ao plano de equação $x-2y+2z=1$, e nesse caso calcule a distância de $R_\alpha$ a este plano.

75. Prove que, dadas duas quaisquer rectas $x=p+\alpha v$ e $x=q+\alpha w$ em $\mathbb{R}^n$ com $n \geq 3$, existe sempre um plano de dimensão 3 que as contém a ambas. Qual é a condição necessária e suficiente para que exista um plano de dimensão 2 que as contenha?

76. Mostre que são concorrentes as duas rectas em $\mathbb{R}^5$ $\{(2,1,1,3,-3)\}+\mathcal{L}\{(2,3,1,1,-1)\}$ e $\{(1,1,2,1,2)\}+\mathcal{L}\{(1,2,1,0,1)\}$ e determine o seu ponto de intersecção. Indique o plano de dimensão 2 que contém estas duas rectas.

77. Mostre que não existe nenhum plano de dimensão 2 em $\mathbb{R}^5$ que contenha as rectas $\{(8,2,5,15,-3)\}+\mathcal{L}\{(7,-4,11,13,-5)\}$ e $\{(-7,2,-6,-5,3)\}+\mathcal{L}\{(2,9,-10,-6,4)\}$. Indique o plano de dimensão 3 que contém estas duas rectas.

78. Considere as rectas em $\mathbb{R}^4$ de equações paramétricas

$$\begin{cases} x_1 = 2+3\alpha \\ x_2 = 1-\alpha \\ x_3 = -1+2\alpha \\ x_4 = 3-2\alpha \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_1 = 7\alpha \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1+\alpha \\ x_4 = -1+2\alpha \end{cases}.$$

Ache uma recta que passe pela origem e intersecte essas duas rectas, e determine os pontos de intersecção.

79. Considere os dois seguintes planos em $\mathbb{R}^5$: $S_1=\{(4,1,10,-3,5)\}+\mathcal{L}\{(2,1,3,0,1),(1,-4,0,1,-6)\}$ $S_2=\{(-3,2,1,-4,8)\}+\mathcal{L}\{(3,-3,3,1,-5),(5,-2,6,1,-4)\}$. Mostre que $S_1$ e $S_2$ coincidem.

80. Em cada uma das seguintes alíneas, são dados dois planos de dimensão 2 em $\mathbb{R}^5$. Pede-se para estudar a sua posição relativa, isto é, determinar a sua intersecção e, no caso de ela ser vazia, determinar a intersecção dos respectivos subespaços directores.

(a) $\{(3,1,2,0,1)\}+\mathcal{L}\{(2,-6,3,1,-6),(0,5,-2,-1,6)\}$
$\{(1,0,1,1,0)\}+\mathcal{L}\{(-1,1,-1,0,1),(-1,3,-1,-1,2)\}$

(b) $\{(7,-4,0,3,2)\}+\mathcal{L}\{(-1,1,1,1,1),(1,-1,1,1,1)\}$
$\{(6,-5,-1,2,3)\}+\mathcal{L}\{(1,1,-1,1,1),(1,1,1,-1,1)\}$

(c) $\{(2,-3,1,5,0)\}+\mathcal{L}\{(3,-2,1,0,1),(-1,5,-2,0,3)\}$
$\{(0,-1,0,4,1)\}+\mathcal{L}\{(1,2,4,0,-2),(6,3,4,0,3)\}$

(d) $\{(-3,-2,1,-1,2)\}+\mathcal{L}\{(1,-1,1,1,3),(-1,2,1,2,-2)\}$
$\{(-1,0,3,3,8)\}+\mathcal{L}\{(1,1,-3,-3,1),(0,1,2,3,1)\}$

(e) $\{(1,2,0,2,1)\}+\mathcal{L}\{(5,-2,6,1,-4),(2,1,3,0,1)\}$
$\{(1,2,1,2,1)\}+\mathcal{L}\{(1,-4,0,1,-6),(-3,3,-3,-1,5)\}$