Complementos de Álgebra Linear e Geometria Analítica

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Licenciatura em Tecnologias de Informação Visual

Ano lectivo 2005/2006 Folha 6

81. Utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, obtenha uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ a partir dos vectores $(1,0,1)$, $(1,0,-1)$, $(0,3,4)$.

82. Seja F o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vectores $(1,1,-1,-2)$, $(-2,1,5,11)$, $(0,3,3,7)$ e $(3,-3,-3,-9)$. Determine a dimensão de F e encontre uma base ortonormada para F.

83. Projecte o vector $b = (1,3,2)$ sobre os vectores (não ortogonais) $v_1 = (1,0,0)$ e $v_2 = (1,1,0)$. Mostre que, ao contrário do caso ortogonal, a soma das duas projecções não dá a projecção ortogonal de b sobre o subespaço gerado por v_1 e v_2.

84. Calcule a projecção ortogonal do vector $(2,-2,1)$ sobre o plano gerado pelos vectores $(1,1,1)$ e $(0,1,3)$.

85. Exprima a ortogonalização de Gram-Schmidt de $v_1 = (1,2,2)$ e $v_2 = (1,3,1)$ na forma $A = \hat{Q}\hat{R}$, onde A é a matriz 3×2 cujas colunas são v_1 e v_2, $\hat{Q}$ é a matriz 3×2 cujas colunas são os vectores u_1 e u_2 (ortonormados, isto é, ortogonais e de norma 1) obtidos pelo processo e $\hat{R}$ é uma matriz 2×2 triangular superior não-singular.

86. Factorize na forma $A = \hat{Q}\hat{R}$ as seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

87. Mostre que $\hat{Q}\hat{Q}^*$ e $I - \hat{Q}\hat{Q}^*$ são projectores.

88. Prove que se P é um projector ortogonal então $I-2P$ é uma matriz unitária. Dê uma interpretação geométrica deste facto.

89. Considere os vectores

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine uma base ortonormada para o subespaço gerado por v_1 e v_2 através do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.

(b) Seja A a matriz 4-por-2 cujas colunas são v_1 e v_2. Com base na alínea anterior, escreva a decomposição QR da matriz A.

(c) Calcule $I - \hat{Q}\hat{Q}^*$ (em que $\hat{Q}$ é a matriz obtida na alínea anterior).

(d) Verifique que $I - \hat{Q}\hat{Q}^*$ é um projector ortogonal.

(e) Sobre que subespaço é que a matriz $I - \hat{Q}\hat{Q}^*$ projecta ortogonalmente?

90. Considere os vectores

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine uma base ortonormada para o subespaço gerado por v_1, v_2 e v_3 através do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.

(b) Seja A a matriz 3-por-3 cujas colunas são v_1, v_2 e v_3. Com base na alínea anterior, escreva a decomposição QR da matriz A.

(c) Calcule $\hat{Q}\hat{Q}^*$ (em que $\hat{Q}$ é a matriz obtida na alínea anterior).

(d) Verifique que $\hat{Q}\hat{Q}^*$ é um projector ortogonal.

(e) Sobre que subespaço é que a matriz $\hat{Q}\hat{Q}^*$ projecta ortogonalmente?

91. Considere a matriz

$$H = \begin{bmatrix} -c & s \\ s & c \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}),$$

com $s = \text{sen}(\theta)$, $c = \cos(\theta)$ e θ um número real.

(a) Prove que $\det(H) = -1$.

(b) Mostre que H é um reflector de Householder, identificando o vector h a ele associado.

92. Sejam A e y a matriz e o vector dados, respectivamente, por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -\sqrt{5} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad y = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule uma matriz ortogonal H em $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que Hy tenha os elementos nas posições $2,1$ e $3,1$ nulos.

(b) A partir do resultado da alínea (a), calcule uma matriz ortogonal U em $M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ tal que UA tenha zeros na coluna 1 a seguir ao elemento na posição $1,1$ e zeros na coluna 2 a seguir ao elemento na posição $2,2$.

(c) Seja B a matriz constituída pelas duas primeiras colunas de A. Com base na alínea (b), indique, sem efectuar quaisquer contas, como poderia escrever B na forma QR em que $Q \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ é ortogonal e $R \in M_{4\times 2}(\mathbb{R})$ tem zeros nas linhas 3 e 4.

(d) Indique, sem efectuar quaisquer contas, como decomporia B na forma $\hat{Q}\hat{R}$ (com $\hat{Q} \in M_{4\times 2}(\mathbb{R})$ e $\hat{R} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$) a partir da decomposição QR da alínea anterior.

93. Calcule os valores próprios e vectores próprios de um reflector de Householder.