Complementos de Álgebra Linear e Geometria Analítica

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Licenciatura em Tecnologias de Informação Visual

Ano lectivo 2005/2006 Folha 7

94. Seja x um vector de $\mathbb{C}^n$. Considere-se a matriz em $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ que se obtém da matriz identidade alterando, apenas, os seus elementos nas posições $i,i,\ \ i,j,\ \ j,i$ e j,j,

$$G = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & \bar{c} & \cdots & \bar{s} & & & \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ & & & -s & \cdots & c & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix},$$

em que

$$c = \frac{x_i}{\sqrt{|x_i|^2+|x_j|^2}} \quad \text{e} \quad s = \frac{x_j}{\sqrt{|x_i|^2+|x_j|^2}}.$$

Os índices i e j verificam $i \neq j$ e $i,j \in \{1,\ldots,n\}$. Esta matriz é conhecida por *rotacional* de Givens (associado ao vector x).

(a) Demonstre que a j-ésima componente de Gx é nula.

(b) Mostre que G é uma matriz unitária.

(c) Dado um vector $z \in \mathbb{C}^n$, explique como poderia determinar, utilizando $n-1$ rotacionais de Givens, uma matriz unitária U tal que Uz fosse um múltiplo de e_1 (a primeira coluna da matriz identidade de ordem n).

95. Considere a matriz

$$G = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}),$$

com $s = \operatorname{sen}(\theta)$, $c = \cos(\theta)$ e θ um número real.

(a) Confirme que $\det(G) = 1$.

(b) Mostre que a transformação linear associada a G corresponde a uma *rotação* (em vez de uma reflexão). Em que sentido é feita a rotação?

(c) Identifique G como um rotacional de Givens.

96. Mostre que

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2} \qquad (A \in M_{m\times n}(\mathbb{C}))\,.$$

97. Calcule a norma de Frobenius das seguintes matrizes:

$$\begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{5} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

98. Mostre que $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$, em que $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ e $x \in \mathbb{C}^n$.

99. Considere uma matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$.

   (a) Seja $U \in M_{m\times m}(\mathbb{C})$ uma matriz unitária. Prove que

   $$\|UA\|_F = \|A\|_F \quad \text{e} \quad \|UA\| = \|A\|.$$

   Sugestão: Utilize as fórmulas $\|C\|_F = \sqrt{\operatorname{tr}(C^*C)}$ e $\|C\| = \sqrt{\rho(C^*C)}$.

   (b) Considere, agora, $V \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ uma matriz unitária. Mostre que

   $$\|AV\|_F = \|A\|_F \quad \text{e} \quad \|AV\| = \|A\|.$$

   Sugestão: No caso da norma de Frobenius recorra a $\|C^*\|_F = \|C\|_F$ e ao resultado da alínea anterior. Para a norma euclidiana use $\|C\| = \max_{\|z\|=1}\|Cz\|$.

100. Seja D uma matriz diagonal n-por-n com elementos complexos. Calcule $\|D\|$ e $\|D\|_F$ em função dos elementos diagonais de D.

101. Sejam $u \in \mathbb{C}^m$ e $v \in \mathbb{C}^n$. Considere a matriz definida por

$$A = uv^* \in M_{m\times n}(\mathbb{C}).$$

   (a) Mostre que

   $$\|Ax\| \leq \|u\|\|v\|\|x\| \qquad \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

   Conclua que $\|A\| \leq \|u\|\|v\|$.

   (b) Faça $x = v$ e conclua, daqui, que $\|A\| = \|u\|\|v\|$.

   (c) O que pode dizer sobre $\|A\|_F$?

102. Calcule decomposições em valores singulares (nas formas reduzida e completa) das seguintes matrizes:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} i & i \\ i & i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

103. Calcule as normas euclidianas das matrizes dadas no exercício anterior.