MATEMÁTICA NUMÉRICA II – Exame Modelo

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA F.C.T.U.C.

Duração: 2h15m

Atenção: Justifique todas as suas respostas. Podem consultar-se os apontamentos das aulas, bem como os enunciados e as respostas dos exercícios das aulas e dos trabalhos.

---

1. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes continuamente diferenciável e com matriz Hessiana definida positiva em $\mathbb{R}^n$. Considere a mudança de variáveis:

$$x \;=\; Ry\,, \quad \text{em que } R \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ é uma matriz não singular.}$$

Considere a função $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $g(y) = f(Ry)$. Por derivação composta, tem-se que $\nabla g(y) = R^\top \nabla f(Ry)$ e $\nabla^2 g(y) = R^\top \nabla^2 f(Ry) R$.

(a) Prove que a matriz Hessiana de g também é definida positiva em $\mathbb{R}^n$.

(b) Mostre que o método de Newton é invariante ao escalonamento nas variáveis, ou seja, que as fórmulas $x_{k+1} = x_k - \nabla^2 f(x_k)^{-1} \nabla f(x_k)$ e $y_{k+1} = y_k - \nabla^2 g(y_k)^{-1}$ $\nabla g(y_k)$ são equivalentes.

(c) Mostre que quando a matriz R é ortogonal, $x_{k+1} = x_k - \nabla f(x_k)$ e $y_{k+1} = y_k - \nabla g(y_k)$ são equivalentes.

2. Considere uma expansão em h dada por

$$\mathcal{A}(h) \;=\; \alpha_0 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \mathcal{R}_3(h),$$

em que $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ e $|\mathcal{R}_3(h)| \leq Ch^3$ (com $C > 0$ independente de h).

(a) Qual é a ordem com que $\mathcal{A}(h)$ aproxima α_0?

(b) Mostre, especificando α_0, α_1, α_2 e $\mathcal{R}_3(h)$, que pode descrever, desta forma, a fórmula de Taylor de ordem 2 com resto de Lagrange, para uma função f em torno de um dado ponto x_0.

(c) Multiplique a expansão dada em cima por $\delta \in (0,1)$. Substitua, também na expansão original, h por δh. Substraia as duas igualdades assim obtidas membro a membro. Conclua que obteve uma nova aproximação para α_0 da forma

$$\mathcal{B}(h) \;=\; \frac{\mathcal{A}(\delta h) - \delta \mathcal{A}(h)}{1-\delta}.$$

(d) Qual é a ordem com que $\mathcal{B}(h)$ aproxima α_0?

3. Dada uma função f, contínua em $[0,1]$, considere o seguinte problema de condições de fronteira:

$$\text{encontrar} \quad u \in C^2[0,1] \quad \text{tal que} \quad \begin{cases} -u''(x) \;=\; f(x) & \text{se } \; x \in (0,1), \\ u(0) \;=\; u_i \qquad u(1) \;=\; u_f. \end{cases}$$

Este problema coincide com aquele que foi dado na disciplina quando $u_i = u_f = 0$. Considere o mesmo espaço V para as funções teste, bem como o mesmo seu subespaço V_h.

(a) Mostre que a formulação variacional deste problema coincide com a do caso $u_i = u_f = 0$.

(b) Considere o conjunto $\{\Psi_0, \Psi_1, \ldots, \Psi_n, \Psi_{n+1}\}$, em que Ψ_0 é a função que se anula em todos os subintervalos menos no primeiro onde varia, linearmente, de 1 a 0, e Ψ_{n+1} é a função que se anula em todos os subintervalos menos no último onde varia, linearmente, de 0 a 1. Mostre que este conjunto é uma base para o espaço das funções contínuas em $[0,1]$ e lineares nos n subintervalos da discretização.

(c) Mostre que qualquer função z, linear nos n subintervalos da discretização, contínua em $[0,1]$ e tal que $z(0) = u_i$ e $z(1) = u_f$, se pode escrever na forma

$$z(x) \;=\; u_i\Psi_0(x) + z(x_1)\Psi_1(x) + \cdots + z(x_n)\Psi_n(x) + u_f\Psi_{n+1}(x).$$

(d) Deduza o sistema de equações lineares do método dos elementos finitos (na variante de Galerkin) associado a esta nova formulação variacional. Conclua que a única diferença para o caso $u_i = u_f = 0$ está nas primeira e última componentes do vector de carga.

4. Considere o método de Euler modificado (para problemas de valor inicial) definido por:

$$u_{k+1} \;=\; u_k + hf(t_k + h/2, u_k + hf(t_k, u_k)/2), \quad 0 \leq k \leq n_h - 1, \quad u_0 \;=\; y_0.$$

Pode assumir que a função f é contínua à Lipschitz relativamente ao seu segundo argumento (com constante $L > 0$).

(a) Identifique a função incremental $\Phi(t_k, u_k, f(t_k, u_k); h)$.

(b) Mostre que o método é consistente com o problema de valor inicial.

(c) Mostre que a função incremental é contínua à Lipschitz relativamente a u_k.

(d) Prove que o método é convergente.