MATEMÁTICA NUMÉRICA II – Exame – 25/01/06

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA F.C.T.U.C.

Duração: 2h15m

Atenção: Justifique todas as suas respostas. Podem consultar-se os Apontamentos de Matemática Numérica II de 2005/2006 (com anotações feitas na aula).

---

1. Uma sucessão $\{x_k\}$ de $\mathbb{R}^n$, convergente para x_*, apresenta uma taxa de convergência cúbica quando existe uma constante $M_c > 0$ tal que

$$\|x_{k+1} - x_*\| \;\leq\; M_c \|x_k - x_*\|^3$$

para todo o $k \in \mathbb{N}$.

(a) Mostre que se uma sucessão converge cubicamente (para x_*) então converge quadraticamente (para x_*).

(b) Dê um exemplo de uma sucessão que convirja cubicamente para 0 (no caso $n = 1$).

2. Considere a função real de n variáveis reais definida por

$$f(x) \;=\; \frac{1}{2}\|Ax - b\|^2 + \frac{\alpha}{2}\|x\|^2,$$

em que $\alpha \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$.

(a) Escreva o gradiente e a Hessiana de f em x.

(b) Para que valores de α é a matriz Hessiana definida positiva?

(c) Seja $\alpha > 0$. Determine o único minimizante de f.

(d) No contexto da alínea anterior, quantas iterações levaria o método de Newton a convergir para esse minimizante?

3. Seja $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$ uma partição do intervalo $[a, b]$. Prove que existem números reais $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ tais que

$$\sum_{j=0}^{n} \gamma_j p(x_j) \;=\; \int_a^b p(x)dx$$

para todo o polinómio $p \in \mathbb{P}_n$. Sugestão:

   (a) Mostre que a tese é válida para os polinómios $1, x, x^2, \ldots, x^n$, utilizando o que sabe sobre a matriz de Vandermonde.

   (b) Mostre que a tese é válida para qualquer polinómio $p \in \mathbb{P}_n$ recorrendo à alínea anterior.

4. Dada uma função f, contínua em $[0, 1]$, considere o seguinte problema de condições de fronteira:

$$\text{encontrar} \quad u \in C^2[0,1] \quad \text{tal que} \quad \begin{cases} -u''(x) + u(x) \;=\; f(x) & \text{se } \; x \in (0,1), \\ u(0) \;=\; c_0 \qquad u(1) \;=\; c_1. & \end{cases}$$

   (a) Deduza um problema variacional a partir deste problema. Considere, para o efeito, o mesmo espaço V para as funções teste que foi usado no caso em que $c_0 = c_1 = 0$.

   (b) Recorde a partição de $[0, 1]$ dada por $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = 1$. Seja $\Psi_0(x)$ (resp. $\Psi_{n+1}(x)$) a função linear por troços em $[0, 1]$ que vale 1 em $x_0 = 0$ e 0 nos restantes nodos (resp. 1 em $x_{n+1} = 1$ e 0 nos restantes nodos). Represente geometricamente estas duas funções.

   (c) Considere, agora, o conjunto das funções lineares por troços que valem c_0 em $x_0 = 0$ e c_1 em $x_{n+1} = 1$ e que pode ser escrito na forma

$$\{c_0\Psi_0 + c_1\Psi_{n+1}\} \;+\; L(\Psi_1, \ldots, \Psi_n),$$

   em que $L(\Psi_1, \ldots, \Psi_n)$ é o subespaço gerado por $\Psi_1, \ldots, \Psi_n$. Em que situação é que este conjunto é um subespaço?

   (d) Escreva os elementos deste conjunto como combinação linear de $\Psi_0, \Psi_1, \ldots, \Psi_n$, Ψ_{n+1}, identificando os respectivos coeficientes.

   (e) Escreva o problema variacional $(\bar{V}_h)$ associado a esta discretização e, a partir deste, deduza um sistema de equações lineares. (Considere, para as funções teste, o mesmo subespaço V_h usado no caso em que $c_0 = c_1 = 0$.)