MATEMÁTICA NUMÉRICA II – Exame – 25/01/07

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA F.C.T.U.C.

Duração: 2h15m

Atenção: Justifique todas as suas respostas. Podem consultar-se os Apontamentos de Matemática Numérica II de 2006/2007 (com anotações feitas na aula).

---

1. Considere o contexto da resolução numérica de um sistema de equações não lineares $F(x) = 0$, com $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, n e m inteiros positivos a satisfazer $n > m$ e F continuamente diferenciável (e com matriz Jacobiana dada por $J(x)$).

   (a) Determine o conjunto das raízes do sistema definido por

   $$F(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2 + x_3 \\ x_1^2 + x_3 \end{bmatrix}.$$

   (b) Escreva a matriz Jacobiana de $F(x)$ para o exemplo da alínea anterior e mostre que tem sempre característica igual a 2.

   (c) No caso geral, mostre que a direcção $d(x) = -J(x)^\top \left(J(x)J(x)^\top\right)^{-1} F(x)$ é uma direcção de descida para a função $(1/2)\|F(x)\|^2$, se $F(x) \neq 0$.

   Tome, agora, $F(x) = Ax - b$, em que $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ é uma matriz com característica m e $b \in \mathbb{R}^m$.

   (d) Mostre que $x_0 + d(x_0)$ é solução de $F(x) = 0$.

   (e) Prove que quando $x_0 = 0$ a solução encontrada é aquela que tem menor norma entre todas as soluções de $F(x) = 0$.

2. Considere a matriz F da transformada discreta de Fourier de ordem 4 ($N = 4$).

   (a) Escreva F em função de 1, w, w^2 e w^3.

   (b) Marque 1, w, w^2 e w^3 no plano complexo.

   (c) Escreva $\bar{F}$ em função de 1, w, w^2 e w^3.

   (d) Mostre que $F\bar{F} = 4I$. Não efectue todos os cálculos (basta calcular, por exemplo, o produto da segunda linha de F pela terceira coluna de $\bar{F}$). Qual é a inversa de F?

3. Dada uma função f, contínua em $[0,1]$, considere o seguinte problema de condições de fronteira:

$$\text{encontrar} \quad u \in C^4[0,1] \quad \text{tal que} \quad \begin{cases} u^{(4)}(x) = f(x) & \text{se } x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \\ u''(0) = u''(1) = 0. \end{cases}$$

   (a) Mostre, através da mudança de variável $y = -u''$, que é possível reescrever a equação diferencial $u^{(4)}(x) = f(x)$ como um sistema formado pelas equações $-u''(x) = y(x)$ e $-y''(x) = f(x)$.

   (b) Derive, então, a seguinte formulação variacional para o problema de condições de fronteira (V é o espaço das funções teste usual): encontrar $u, y \in V$ tais que

$$\langle u', v' \rangle - \langle y, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V,$$
$$\langle y', v' \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V.$$

   (c) Considere as funções teste $\psi_1, \ldots, \psi_n$ do método dos elementos finitos. Procedendo de forma análoga à deste método, encontre um sistema de equações lineares que permita calcular aproximações $u_h(x) = \sum_{i=1}^n \xi_i \psi_i(x)$ e $y_h(x) = \sum_{i=1}^n \pi_i \psi_i(x)$ para o problema variacional anterior.

4. Este exercício tem por objectivo estudar o método de Euler implícito para problemas de valor inicial (com a formulação e hipóteses consideradas nas aulas). Neste método, o valor de u_{k+1} é solução de

$$u_{k+1} = u_k + hf(t_{k+1}, u_{k+1}).$$

   (a) Prove que a solução do problema de valor inicial satisfaz

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1}) + E_{k+1}(h),$$

   em que $E_{k+1}(h) = -(1/2)y''(t_{k+1} - \sigma_k h)h^2$, com $\sigma_k \in (0,1)$.

   (b) Determine a ordem do erro $E_{k+1}(h)$ (enquanto potência de h) e a respectiva constante.