MATEMÁTICA NUMÉRICA II – Exame – 09/02/05

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA F.C.T.U.C.

Duração: 2h15m

Atenção: Justifique todas as suas respostas. Podem consultar-se os apontamentos das aulas, bem como os enunciados e as respostas dos exercícios das aulas e dos trabalhos.

---

1. Sejam x_* um ponto de $\mathbb{R}^n$ e F uma função de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^n$ tais que a matriz Jacobiana de F é não singular em x_* e é contínua à Lipschitz num aberto contendo x_*.
Seja $\{x_k\}$ uma sucessão de $\mathbb{R}^n$ a convergir para x_*, gerada da seguinte forma:

$$x_{k+1} \;=\; x_k + s_k \qquad \text{com} \qquad J(x_k)s_k = -F(x_k) + r_k\,,$$

em que r_k é um vector não nulo de $\mathbb{R}^n$ e $s_k \neq 0$ para todo o k.

   (a) Prove que s_k satisfaz:

$$A_k s_k \;=\; -F(x_k) \quad \text{em que} \quad A_k \;=\; J(x_k) - \frac{r_k s_k^\top}{s_k^\top s_k}.$$

   (b) Recorrendo à expressão da alínea anterior e a um resultado dado nas aulas, mostre que, sob determinadas condições, $\{x_k\}$ converge q-superlinearmente para x_* se e só se

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\|r_k\|}{\|s_k\|} \;=\; 0\,.$$

2. Considere a função $f(x) = e^{i\ell x}$, com $\ell \in \mathbb{N}$.

   (a) Mostre que a fórmula das diferenças progressivas de primeira ordem é dada por

$$e^{i\ell x}\left(\frac{e^{i\ell h}-1}{h}\right).$$

   Considere, agora, o espaço vectorial com produto interno $L^2[0,1]$ dado na aula sobre aproximação trigonométrica. Assuma que $\ell \leq n$.

   (b) Mostre que f está em $L^2[0,1]$.

   (c) Calcule, sem efectuar quaisquer cálculos, a projecção ortogonal de f sobre o subespaço gerado pelos polinómios de Fourier $\phi_k(x)$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm n$. Quanto vale o coeficiente de Fourier contínuo $\hat{f}_\ell$?

(d) Quanto vale o coeficiente de Fourier discreto $\tilde{f}_\ell$ (com $N = 2n+1$)?

3. Dada uma função f, contínua em $[0,1]$, considere o seguinte problema de condições de fronteira:

$$\text{encontrar} \quad u \in C^2[0,1] \quad \text{tal que} \quad \begin{cases} -u''(x) + u(x) \;=\; f(x) & \text{se } x \in (0,1), \\ u(0) \;=\; 0 \qquad u(1) \;=\; 0. \end{cases}$$

Foram estudadas, para este problema, a formulação variacional (V') e a formulação variacional (V'$_h$) (versão Galerkin do método dos elementos finitos).

(a) Qual é o problema de minimização (M') associado ao princípio da energia potencial mínima?

(b) Qual é o problema de minimização (M'$_h$) equivalente a (V'$_h$) (versão Ritz do método dos elementos finitos)?

(c) Mostre que os problemas (V'$_h$) e (M'$_h$) são equivalentes.

4. Considere o método de Heun de terceira ordem (para problemas de valor inicial) definido por:

$$\begin{aligned} F_k^1 &= f(t_k, u_k), \\ F_k^2 &= f(t_k + h/3, u_k + hF_k^1/3), \\ F_k^3 &= f(t_k + 2h/3, u_k + 2hF_k^2/3), \\ u_{k+1} &= u_k + h\left(\tfrac{1}{4}F_k^1 + \tfrac{3}{4}F_k^3\right), \end{aligned}$$

para $0 \le k \le n_h - 1$ e $u_0 = y_0$. Pode assumir que a função f é contínua à Lipschitz relativamente ao seu segundo argumento (com constante $L > 0$).

(a) Classifique este método (explícito/implícito, passo simples/passos múltiplos, Taylor/Runge–Kutta).

(b) Escreva a fórmula de actualização do método na forma $u_{k+1} = u_k + h\Phi(t_k, u_k, f(t_k, u_k); h)$, identificando a sua função incremental.

(c) Mostre que, quando aplicado ao problema teste (I$_\lambda$), este método gera uma sequência da forma

$$u_{k+1} \;=\; \left(1 + h\lambda + (h\lambda)^2/2 + (h\lambda)^3/6\right)^{k+1}, \qquad k \ge 0.$$

(d) Este método é $\mathcal{A}$–estável?