MATEMÁTICA NUMÉRICA II – Exame – 08/02/06

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA F.C.T.U.C.

Duração: 2h15m

Atenção: Justifique todas as suas respostas. Podem consultar-se os Apontamentos de Matemática Numérica II de 2005/2006 (com anotações feitas na aula).

---

1. Considere a aplicação do método de Newton à resolução numérica da equação $x^3 = 0$.

   (a) Seja $x_0 \neq 0$. Prove que $x_{k+1} = (2/3)^{k+1} x_0$.

   (b) Estude a taxa de convergência da sucessão gerada.

   (c) Diga por que motivo é que a resposta da alínea anterior não entra em contradição com o teorema da convergência local do método de Newton.

2. Considere a fórmula de quadratura para integração em $[a, b]$ dada por

$$F_3(f) \; = \; \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right] + \frac{(b-a)^2}{12}\left[f'(a) - f'(b)\right],$$

   conhecida por *fórmula trapezoidal corrigida*, cujo o erro para funções quatro vezes continuamente diferenciáveis em $[a, b]$ é dado por

$$I(f) - F_3(f) \; = \; f^{(4)}(\eta)(b-a)^5/720$$

   com $\eta \in (a, b)$.

   (a) Qual é o grau de exactidão desta fórmula? Qual é a sua ordem de precisão?

   (b) Deduza um limite superior para o erro na forma Ch^5, em que $h = b - a$ e C é uma constante independente de η.

   (c) Tome a função $f(x) = x^3$ e $a = -1$ e $b = 1$. Mostre que o resultado da aplicação desta fórmula coincide com o da fórmula trapezoidal.

   (d) Considere, agora, a função $f(x) = \text{sen}(x)$ e $a = 0$ e $b = \pi$. Que outras fórmulas conhecidas, para além da trapezoidal corrigida, é que aplicaria neste caso?

3. No âmbito da aproximação discreta de Fourier, considere duas funções g e h definidas nos $N = 2n+1$ pontos $x_j = 2\pi j/N$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$, e tais que

$$g(x_k) \;=\; \langle h(x), e^{ikx} \rangle_N, \quad k = 0, \ldots, N-1.$$

   (a) Mostre que

$$N \begin{bmatrix} g(x_n) \\ g(x_{n+1}) \\ \vdots \\ g(x_{N-1}) \\ g(x_0) \\ \vdots \\ g(x_{n-1}) \end{bmatrix} \;=\; F \begin{bmatrix} h(x_0) \\ h(x_1) \\ \vdots \\ h(x_n) \\ h(x_{n+1}) \\ \vdots \\ h(x_{N-1}) \end{bmatrix},$$

   em que F é a matriz da transformada discreta de Fourier.

   (b) Escreva o vector que envolve os valores de h em função do vector que guarda os valores de g.

   (c) Mostre que $h(x_0) = \sum_{i=0}^{N-1} g(x_i)$.

   (d) Escreva as componentes de $\bar{F}$ em função de w (com $w = e^{-i2\pi/N}$) para o caso $N = 5$.

4. Considere um problema de valor inicial, formulado na forma

$$\text{encontrar} \quad y \in C^1(I) \quad \text{tal que} \quad \begin{cases} y'(t) \;=\; f(t, y(t)) & \text{se } t \in I, \\ y(t_0) \;=\; y_0, \end{cases}$$

em que a função f é contínua à Lipschitz em $\mathbb{R}^2$ relativamente ao seu segundo argumento (designe por γ a respectiva constante de Lipschitz).

Considere, também, o método numérico para a resolução deste problema definido pela função incremental

$$\Phi(t_k, u_k, f(t_k, u_k); h) \;=\; \frac{1}{2} f(t_k, u_k) + \frac{1}{2} f(t_k + h, u_k + h f(t_k, u_k)).$$

   (a) Identifique o método em causa e classifique-o.

   (b) Prove que o método é estável-zero.

   (c) Diga por que motivo o método é convergente.

   (d) Prove que o método não é A–estável.