

Matemática Numérica II

Ano Lectivo 2006/07

Trabalho 1

Data de recepção: **13/09/2006**

Data de entrega: **27/09/2006**

1. Considere a função vectorial $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$F(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} e^{x_1} - 1 \\ \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \end{bmatrix}.$$

Indique um valor para constante de Lipschitz da matriz Jacobiana de F no conjunto $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

2. Considere o sistema

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1^2 + x_2^2 + 10^{-3}x_1 \end{bmatrix} = 0.$$

- (a) Aproxime a solução usando o método de Newton, em MATLAB, partindo do ponto $x_0 = [0.01 \ 0.01]^\top$.
- (b) Explique o motivo pelo qual a convergência para a solução é *lenta*.
- (c) Como poderia contornar o problema?
3. Uma sucessão $\{x_k\}$ de \mathbb{R}^n , convergente para x_* , apresenta uma taxa de convergência cúbica quando existe uma constante $M_c > 0$ tal que

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq M_c \|x_k - x_*\|^3$$

para todo o $k \in \mathbb{N}$.

- (a) Mostre que se uma sucessão converge cubicamente (para x_*) então converge quadraticamente (para x_*).
- (b) Dê um exemplo de uma sucessão que convirja cubicamente para 0 (no caso $n = 1$).

4. Considere a aplicação do método de Newton à resolução numérica da equação $x^3 = 0$.
- (a) Seja $x_0 \neq 0$. Prove que $x_{k+1} = (2/3)^{k+1}x_0$.
 - (b) Estude a taxa de convergência da sucessão gerada.
 - (c) Diga por que motivo é que a resposta da alínea anterior não entra em contra-dição com o teorema da convergência local do método de Newton.
5. Neste exercício pretende-se analisar a taxa quadrática de convergência local do método de Newton *inexacto*. Suponha que em vez de ser calculado o passo de Newton exacto é determinado um passo p_k tal que

$$J(x_k)p_k = -F(x_k) + e_k,$$

em que $e_k \in \mathbb{R}^n$ representa o erro residual. Prove, nas condições do Teorema 1, que a sucessão $\{x_k\}$ converge quadraticamente para x_* se existir uma constante positiva c tal que

$$\|e_k\| \leq c\|F(x_k)\|^2 \quad \text{para todo o } k.$$