Matemática Numérica II

Ano Lectivo 2006/07

Trabalho 2

Data de recepção: **27/09/2006** Data de entrega: **16/10/2006**

1. Nas condições do Teorema 2, prove que

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{\| (A_k - J(x_k))\, s_k \|}{\|s_k\|} \;=\; 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{k \to +\infty} \frac{\|s_k - p_k\|}{\|s_k\|} \;=\; 0.$$

2. (a) Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável no domínio D aberto e $x \in D$. Prove que a direcção $p \in \mathbb{R}^n$ é de descida em x se

$$-\nabla f(x)^\top p \;>\; 0.$$

   (b) Suponha agora que a função é duas vezes continuamente diferenciável em D e que $\nabla f(x)^\top p = 0$. Aponte uma condição suficiente para que p seja de descida em x.

3. Este exercício é para ser resolvido em MATLAB. As duas primeiras alíneas deverão ser justificadas matematicamente.

   (a) Escreva uma função que, dada a matriz H simétrica, devolva uma matriz simétrica E para a qual o menor valor próprio de $H + E$ não seja inferior a 10^{-4}.

   (b) Escreva uma função que, dada a matriz H simétrica, devolva uma matriz simétrica E para a qual $H + E$ seja definida positiva (sem recorrer ao cálculo de valores próprios de H).

   (c) Explique qual seria a utilidade destes procedimentos numa implementação do método de Newton modificado para optimização sem restrições.

4. Considere a função real de n variáveis reais definida por

$$f(x) \; = \; \frac{1}{2}\|Ax-b\|^2 + \frac{\alpha}{2}\|x\|^2,$$

em que $\alpha \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$.

(a) Escreva o gradiente e a Hessiana de f em x.

(b) Para que valores de α é a matriz Hessiana definida positiva?

(c) Seja $\alpha > 0$. Determine o único minimizante de f.

(d) No contexto da alínea anterior, quantas iterações levaria o método de Newton a convergir para esse minimizante?

5. Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função continuamente diferenciável e com matriz Jacobiana não singular em $\mathbb{R}^n$.

Considere o sistema de equações não lineares

$$F(x) \; = \; 0$$

e o problema de mínimos quadrados

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \; \frac{1}{2}\|F(x)\|^2.$$

(a) Escreva a direcção de descida máxima para o problema de mínimos quadrados.

(b) Qualquer ponto estacionário deste problema de optimização é solução do sistema. Porquê?

(c) Prove que o passo de Newton para o sistema de equações não lineares é uma direcção de descida para o problema de mínimos quadrados (se $F(x) \neq 0$).

(d) Mostre que o método de Newton para o sistema de equações não lineares coincide com o método de Gauss–Newton para o problema de mínimos quadrados.