# Matemática Numérica II

Ano Lectivo 2006/07

## Trabalho 4

Data de recepção: **02/11/2006** Data de entrega: **22/11/2006**

1. Seja $f$ uma função contínua em $[0,1]$. Considere a função real de $n+1$ variáveis reais dada por

$$g(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \;=\; \int_0^1 \left( f(x) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k \right)^2 dx,$$

que descreve uma forma de medir o erro da aproximação de $f$, em $[0,1]$, por um polinómio de grau $n$.

(a) Determine escalares $\alpha_0^*, \alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*$ de forma a que $\nabla g(\alpha_0^*, \alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*) = 0$. (Estes escalares são a solução de um sistema de equações lineares. Não é necessário resolver o sistema.)

(b) O que teria de provar para afirmar que $[\, \alpha_0^* \; \alpha_1^* \; \ldots \; \alpha_n^* \,]^\top$ é o (único) minimizante da função $g$?

(c) A matriz deste sistema de equações lineares, conhecida por matriz de Hilbert, é extremamente mal-condicionada. Calcule, em MATLAB e *numa só instrução*, o número de condição desta matriz quando $n = 9$. Verifique, em MATLAB, que os seus valores próprios são todos positivos.

2. Considere a seguinte matriz tridiagonal

$$T \;=\; \begin{bmatrix} E_1 & F_2 & & & 0 \\ D_2 & E_2 & F_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & F_n \\ 0 & & & D_n & E_n \end{bmatrix}.$$

(a) Prove que o polinómio característico $p_n(x)$ de $T$ satisfaz a fórmula de recorrência

$$D_n^{-1} p_n(x) = D_n^{-1}(x - E_n) p_{n-1}(x) - F_n p_{n-2}(x), \quad n \geq 2,$$

com $p_0(x) = 1$ e $p_1(x) = x - E_1$.

(b) Conclua, justificando, que os valores próprios da matriz $T$ são os zeros de $p_n(x)$.

3. Neste exercício pretende-se ilustrar a implementação de uma fórmula de quadratura Gaussiana.

   (a) Comece por mostrar que a fórmula de recorrência para os polinómios de Legendre se pode escrever na forma dada no exercício anterior.

   (b) Depois, considere a seguinte função em MATLAB:

```
function I = gauss(f,n)
beta  = .5./sqrt(1-(2*(1:n)).^(-2));
T     = diag(beta,1)+diag(beta,-1);
[V,D] = eig(T);
x     = diag(D);
[x,i] = sort(x);
w     = 2*V(1,i).^2;
I     = w*feval(f,x);
```

   Explique, linha-a-linha, o significado das instruções da função.

   (c) Finalmente, corra esta função com $n = 3$ e $f(x) = x^7$ e $f(x) = x^8$. Comente os resultados obtidos.

4. Considere a matriz da transformada discreta de Fourier de ordem 3:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w^4 \end{bmatrix}.$$

   (a) Escreva as componentes de $F$ em função de, apenas, 1, $w$ e $w^2$. Marque $1 = w^0$, $w = w^1$ e $w^2$ no círculo unitário do plano complexo.

   (b) Mostre que $F\bar{F} = 3I$. Identifique $F^{-1}$.

   (c) Mostre que $FC = DF$ em que

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   e $D$ é a matriz diagonal de elementos diagonais 1, $w$ e $w^2$. Quais são os valores próprios de $C$?

   (d) Escreva a matriz (circulante)

$$H = \begin{bmatrix} h_0 & h_2 & h_1 \\ h_1 & h_0 & h_2 \\ h_2 & h_1 & h_0 \end{bmatrix}$$

   em função das potências de $C$ dadas por $I = C^0$, $C$ e $C^2$.

   (e) Multiplique esta expressão para $H$, à esquerda, por $F$ e, à direita, por $F^{-1}$. Conclua que $F$ também diagonaliza $H$. Quais são os valores próprios de $H$?