Matemática Numérica II

Ano Lectivo 2006/07

Trabalho 5

Data de recepção: **23/11/2006** Data de entrega: **12/12/2006**

1. Dada uma função f, contínua em $[0,1]$, considere o seguinte problema de condições de fronteira:

$$\text{encontrar} \quad u \in C^2[0,1] \text{ tal que } \quad \left\{ \begin{array}{l} -u''(x) + u(x) \; = \; f(x) \quad \text{se } x \in (0,1), \\ u(0) \; = \; c_0 \quad u(1) \; = \; c_1. \end{array} \right. \qquad (P_1)$$

   (a) Deduza um problema variacional a partir deste problema. Considere, para o efeito, o mesmo espaço V para as funções teste que foi usado no caso em que $c_0 = c_1 = 0$.

   (b) Recorde a partição de $[0,1]$ dada por $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = 1$. Seja $\Psi_0(x)$ (resp. $\Psi_{n+1}(x)$) a função linear por troços em $[0,1]$ que vale 1 em $x_0 = 0$ e 0 nos restantes nodos (resp. 1 em $x_{n+1} = 1$ e 0 nos restantes nodos). Represente geometricamente estas duas funções.

   (c) Considere, agora, o conjunto das funções lineares por troços que valem c_0 em $x_0 = 0$ e c_1 em $x_{n+1} = 1$ e que pode ser escrito na forma

$$\{c_0\Psi_0 + c_1\Psi_{n+1}\} \; + \; L(\Psi_1, \ldots, \Psi_n),$$

   em que $L(\Psi_1, \ldots, \Psi_n)$ é o subespaço gerado por $\Psi_1, \ldots, \Psi_n$. Em que situação é que este conjunto é um subespaço?

   (d) Escreva os elementos deste conjunto como combinação linear de $\Psi_0, \Psi_1, \ldots, \Psi_n$, Ψ_{n+1}, identificando os respectivos coeficientes.

   (e) Escreva o problema variacional $(\bar{V}_h)$ associado a esta discretização e, a partir deste, deduza um sistema de equações lineares. (Considere, para as funções teste, o mesmo subespaço V_h usado no caso em que $c_0 = c_1 = 0$.)

   (f) Resolva o problema (P_1) com $f(x) = x^2 - 2$, $c_0 = 0$ e $c_1 = 1$, pelo método dos elementos finitos, usando MATLAB. Apresente gráficos com a solução numérica considerando $n = 10$ e $n = 100$.

2. Dada uma função f, contínua em $[0,1]$, considere o problema de condições de fronteira (P_2):

$$\text{encontrar} \quad u \in C^2[0,1] \quad \text{tal que} \begin{cases} -u''(x) = f(x) & \text{se } x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \qquad (P_2)$$

O objectivo deste exercício é conhecer o *método das diferenças finitas* para a resolução do problema (P_2) e estabelecer a sua relação com o método dos elementos finitos. Considere o intervalo $[0,1]$ discretizado na forma

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = 1.$$

Seja u_k uma aproximação para $u(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n, n+1$.

(a) Com k a variar de 1 até n, escreva uma aproximação para $u''(x_k)$ recorrendo à fórmula das diferenças centrais de segunda ordem.

(b) Tome o simétrico da aproximação obtida na alínea anterior e faça-o igual a $f(x_k)$. Reúna todas estas igualdades num sistema de equações lineares e escreva-o na sua forma matricial.

(c) Verifique que este sistema é equivalente ao que foi obtido para o método dos elementos finitos, quando se utiliza a fórmula trapezoidal composta para aproximar $\langle f, \psi_k \rangle$, $k = 1, \ldots, n$.