Matemática Numérica II

Ano Lectivo 2006/07

Trabalho 6

Data de recepção: **13/12/2006** Data de entrega: **22/12/2006**

1. O método de Heun está associado ao método trapezoidal (também conhecido por método de Crank–Nicolson), cuja fórmula de actualização é dada por

$$u_{k+1} \;=\; u_k + \frac{h}{2}\left[f(t_k, u_k) + f(t_{k+1}, u_{k+1})\right].$$

   (a) Mostre que esta fórmula resulta da aplicação da fórmula de quadratura trapezoidal ao integral

$$y(t) - y(t_k) \;=\; \int_{t_k}^{t} f(\tau, y(\tau))\, d\tau.$$

   (b) Mostre que a fórmula de actualização do método de Heun pode ser obtida da do método trapezoidal, substituindo $f(t_{k+1}, u_{k+1})$ por $f(t_{k+1}, u_k + hf(t_k, u_k))$, ou seja, utilizando a fórmula de actualização do método de Euler explícito para aproximar u_{k+1}. (O método de Heun pode ser encarado como um processo de tornar explícito o método trapezoidal.)

   (c) Prove que o método de Heun tem um erro de truncatura local de ordem 2:

$$\frac{R_{k+1}(h)}{h} \;=\; \mathcal{O}(h^2).$$

   Decomponha, primeiro, o erro $R_{k+1}(h)$ na soma dos erros

$$S_1^k(h) \;=\; y_{k+1} - y_k - \frac{h}{2}\left[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})\right]$$

   e

$$S_2^k(h) \;=\; \frac{h}{2}\left[f(t_{k+1}, y_{k+1}) - f(t_k + h, y_k + hf(t_k, y_k))\right].$$

   Ao erro $S_1^k(h)$ aplique o que conhece sobre o erro da fórmula de quadratura trapezoidal. O segundo erro $S_2^k(h)$, analise-o à luz do que sabe sobre o erro de truncatura local do método de Euler explícito.

   (d) Determine a região de estabilidade absoluta do método de Heun.

2. Considere o problema de valor inicial definido por

$$\begin{aligned} y' &= t^3 y^2, \\ y(0) &= 0. \end{aligned}$$

(a) Justifique o motivo pelo qual este problema tem uma e uma só solução no rectângulo $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

(b) Enuncie os passos do método de Taylor de ordem 2 para este problema.

(c) Escreva a fórmula de actualização do método na forma

$$u_{k+1} = u_k + h\Phi(t_k, u_k, f(t_k, u_k); h),$$

identificando a sua função incremental.

(d) Prove que o erro de truncatura local deste método obedece a

$$\left| \frac{R_{k+1}(h)}{h} \right| \leq Ch^2,$$

em que C é uma constante positiva independente de h ou de n_h.

(e) Resolva o problema pelo método anterior para $t \in [0, 1]$, usando MATLAB. Apresente gráficos com a solução numérica considerando $h = 0.01$.