Segundo trabalho
Relatório Geogebra MCEM(Universidade de Coimbra).

Rodrigo Souto

2 de abril de 2017

Resumo

Neste relatório estão as demonstrações teóricas a cerca dos centros de triângulos, estes que foram apresentados intuitivamente no geogebra com pontos móveis. No intuinto de alunos a nível secundário fixarem as idéias teóricas com exemplos mais práticos.

Espera-se que o leitor já tenha um conhecimento sobre as cevianas notáveis de um triângulo, que são as famosas medianas, bissetrizes, mediatrizes e alturas. E com isso demonstraremos propriedades importantes.

1 Mediatrizes e Circuncentro

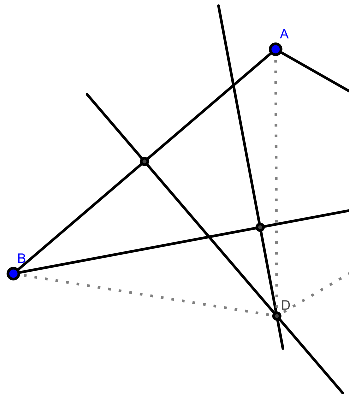
Vai ser demonstrado que as mediatrizes dos três lados de um triângulo qualquer se interceptam em apenas um ponto e que este ponto é o centro de um círculo que contém os três vértices do triângulo, ou seja, é o centro da circunferência circunscrita.

Proposição 1. Seja um triângulo com vértices A, B e C. As mediatrizes dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ se interceptam em apenas um ponto D.

Prova. Da maneira que está ilustrado na figura acima, traçam-se as mediatrizes de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, consequentemente elas se cruzam em apenas um único ponto que denominemos de D. Com isso traçamos o segmento $\overline{AD}$ e por conseguinte nota-se que $\overline{AD} = \overline{BD}$ por congruência de triângulo, já que D pertence a mediatriz de $\overline{AB}$.

Analogamente nota-se que $\overline{BD} = \overline{DC}$ e pela mesma congruência de triângulos (LAL) conclui-se que D pertence à mediatriz de $\overline{AC}$.

■



Definimos o que é uma circunferência circunscrita:

Definição 1. Considere um triângulo com vértices A, B e C. Chama-se circunferência circunscrita ao triângulo aquela que contém seus três vértices.

E esta circunferência está bem definida, pois por propriedade de Geometria Euclidiana, com três pontos definimos apenas uma circunferência.

Proposição 2. O ponto D de encontro das mediatrizes do triângulo com vértices A, B e C é o círculo circunscrito do triângulo.

Prova. É um corolário imediato da proposição 1, pois na demonstração do mesmo se tomarmos um círculo com centro em D que contenha o ponto A temos que o círculo contém também B e C, uma vez que $\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{DC}$. ■

2 Bissetrizes e Incentro

Prova-se que as bissetrizes de um triângulo encontram-se em apenas um ponto D. Com efeito:

Proposição 3. Seja um triângulo de vértices A, B e C. Com isso temos que as bissetrizes dos ângulos desse triângulo se encontram em apenas um ponto D.

Prova. Ao traçar as bissetrizes dos ângulos de vértice A e B temos que se encontram em um ponto D qualquer. Sabemos que, por congruência de triângulos a distância de D até $\overline{AB}$ é a mesma que até $\overline{AC}$.

Assim, se traçarmos a distância de D até $\overline{BC}$ temos que $\overline{BC} = \overline{AB} = \overline{AC}$ e com isso D pertence a bissetriz do ângulo C. ■

Definição 2. Num triângulo com vértices A, B e C um círculo inscrito é o círculo contido dentro do triângulo com três pontos de tangência sobre os lados do triângulo. O centro deste chama-se incentro.

Proposição 4. Considere o triângulo com os vértices A, B e C. Seja D o ponto de encontro da interseção das bissetrizes dos ângulos deste triângulo. O ponto D é o centro da circunferência inscrita.

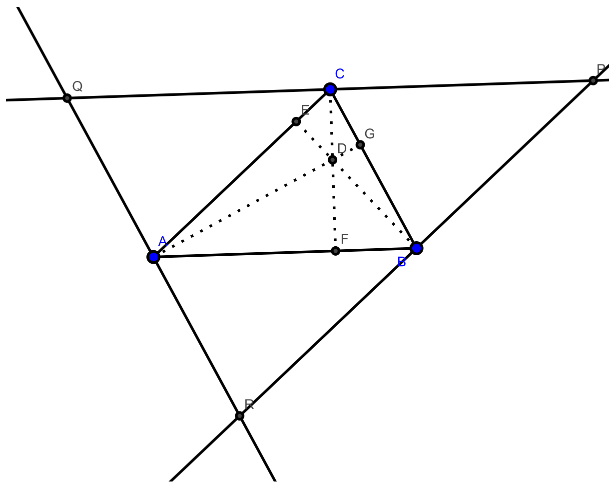
Prova. Com efeito, esta proposição é um corolário direto da Proposição 3 pois se D é o centro então a distância de D a $\overline{AB}, \overline{BC}$ e $\overline{AC}$ é o raio. ■

3 Alturas e Ortocentro

Prova-se que as alturas de um triângulo qualquer de vértices A,B e C, interceptam-se em apenas um ponto D e chamamos este ponto de ortocentro.

Proposição 5. Seja um triângulo de vértices A,B e C.

Traçando as paralelas aos lados $\overline{AB}, \overline{BC}$ e $\overline{AC}$ temos P, Q e R pontos de interseção e um novo triângulo com vértices P, Q e R, veja a figura abaixo.



Temos então que pelo critério LAL de congruência de triângulos os triângulso $[ABC], [CQA], [PCB]$ e $[BAR]$ são congruentes, logo A, B e C são pontos médios de dos lados do triângulo com vértices P, Q e R.

Repare que, ao traçarmos as mediatrizes do triângulo $[PQR]$ temos que estas se encontram em algum único ponto pelo demonstrado na Proposição 1, daí consequentemente as alturas do triângulo de vértices A,B e C que estão contidas nas mediatrizes de $[PQR]$ se encontram em um único ponto que chamamos de D.

Vale notar que usei uma notação que não tinha usado antes, denotando o triângulo de vértices X,Y e Z por $[XYZ]$.

Em relação às propriedades da altura e do ortocentro, não temos nada particularmente considervél, mas temos o triângulo órtico que é o triângulo com vértices nos pés das alturas. Não entraremos em particularidades deste triângulo pois não é o objetivo do trabalho.

4 Medianas e Baricentro

Vai-se demonstrar que as medianas de um triângulo qualquer A,B e C se interceptam em apenas um único ponto. Não será demonstrado de maneira completa, usaremos um teorema auxiliar que não será demonstrado aqui.

Para enunciar o teorema primeiro definimos o que é uma ceviana.

Definição 3. Seja um triângulo de vértices A,B e C. Uma ceviana deste triângulo diz-se, por exemplo, $\overline{AP}$ quand o ponto P está contido no lado oposto ao A, ou seja $P \in \overline{BC}$.

Teorema 1. Considere um triângulo de vértices A, B e C e P, Q e R pontos sobre os lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$. As três cevianas $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$ e $\overline{CR}$ interceptam-se em um único ponto se e somente se $\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}}$.

Este teorema é conhecido como *Teorema de Ceva*.

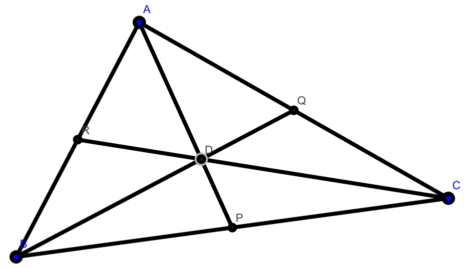
Com isso demonstra-se de maneira indireta o desejado.

Proposição 6. Seja $[ABC]$ o triângulo de vértices A,B e C. Com isso as medianas deste triângulo cortam-se em um e só um ponto.

Prova. Seja P,Q e R os pés das medianas respectivas aos lados $\overline{BC}$,$\overline{AC}$, e $\overline{AB}$. Pela imagem abaixo, temos:

Com isso, pela definição de mediana temos $\overline{AR} = \overline{RB}$, $\overline{BP} = \overline{PC}$ e $\overline{CQ} = \overline{AQ}$.

Logo pelo Teorema 1 temos:



$$\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} = 1 \ .$$

■

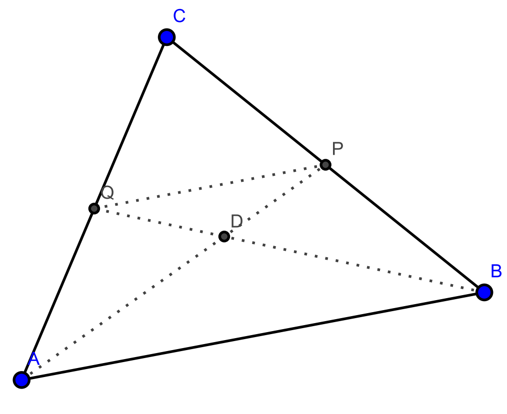
Este ponto de interseção das medianas, denotamos por D e é dito o baricentro do triângulo $[ABC]$.

Existe a seguinte propriedade importante sobre o baricentro.

Proposição 7. Considere um triângulo de vértices A,B e C com D baricentro. O baricentro divide cada mediana na razão $2:1$.

Prova. Como D é o baricentro de $[ABC]$ temos que considerar as medianas $\overline{AP}$ e $\overline{BQ}$.

Note que $\overline{BC} = 2\overline{PC}$ e $\overline{AC} = 2\overline{QC}$ e o ângulo C em comum, logo pelo critério LAL, agora de semelhança e não mais de congruência, temos que $[ABC]$ é semelhante ao $[QPC]$, desta forma fica demonstrado que $\overline{QP}$ é paralela a $\overline{AB}$.



E também temos que $\overline{AB} = 2\overline{PQ}$. Logo pelo critério AA, de semelhança de triângulos, conclui-se que $[ABG]$ é semelhante ao $[PQG]$. Sendo assim conclui-se que:

$$\overline{AG} = 2\overline{PG} \text{ e } \overline{BG} = 2\overline{QG}\ .$$

$\blacksquare$

Para demonstrar a outra mediana, basta fazer de modo análogo.