Sistemas lineares em grafos

Daniela Jordão
Department of Mathematics
University of Coimbra
3001-501 Coimbra, Portugal
e-mail: `daniela.jordao@hotmail.com`

Jorge Neves
CMUC
Department of Mathematics
University of Coimbra
3001-501 Coimbra, Portugal
e-mail: `neves@mat.uc.pt`

Resumo: Faz-se uma curta introdução à teoria dos sistemas lineares em grafos. Descreve-se o Teorema de Riemann–Roch num grafo. Estuda-se o conceito de gonalidade de um grafo e, em particular, calcula-se a gonalidade de um grafo bipartido completo.

Abstract: This article consists of a short introduction to the theory of linear systems on graphs. We describe the Riemann–Roch theorem and we study the concept of gonality of graphs. In particular, we compute the gonality of a complete bipartite graph.

palavras-chave: Sistemas lineares em grafos, Teorema de Riemann–Roch, Gonalidade de um grafo.

keywords: Linear systems on graphs, Riemann–Roch Theorem, Gonality of graphs.

1 Introdução

A noção de sistema linear num grafo surgiu recentemente, ligada à geometria algébrica. Esta ligação, descrita por Baker em [Ba], tem potenciado o rápido crescimento desta nova área da combinatória. De entre as aplicações salientamos as novas demonstrações do Teorema de Brill–Noether e do Teorema de Gieseker–Petri. (*Cf.* [CDPR] e [JePa], respetivamente).

O objetivo deste trabalho é fazer uma breve introdução à teoria dos sistemas lineares em grafos. Na Secção 2 descreveremos as noções de *divisor*, *equivalência linear* e *sistema linear* num grafo. A Secção 3 é dedicada à demonstração do Teorema de Riemann–Roch num grafo, resultado esse que, tal como na geometria algébrica, ocupa aqui um lugar central. Finalmente, na Secção 4, faremos um breve estudo da *gonalidade* de grafos. À exceção da Proposição 4.5, cuja demonstração é original, embora o resultado possa ser encontrado na literatura, todos os resultados na nossa exposição são retirados das referências indicadas.

2 Preliminares

Denotaremos por G um grafo (finito) simples com n vértices. O conjunto dos vértices será denotado por V_G e o conjunto das suas arestas por E_G. Salvo menção em contrário, G supõe-se sempre conexo.

Definição 2.1 (Divisores de G)**.** *Denotemos por* $\mathrm{Div}(G)$ *o grupo abeliano livre gerado por* V_G*. Os elementos de* $\mathrm{Div}(G)$ *designam-se por* divisores de G*. Dado* $D \in \mathrm{Div}(G)$ *denota-se por* $D(v)$ *o coeficiente de* v *em* D*. O divisor* D *diz-se* efetivo *se* $D(v) \geq 0$*, para todo* $v \in V_G$*.*

Fixemos uma ordenação dos vértices $V_G = \{v_1, \ldots, v_n\}$. O isomorfismo $\mathrm{Div}(G) \simeq \mathbb{Z}^n$ permite identificar um divisor $D = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \in \mathrm{Div}(G)$ com o vetor-coluna $\mathbf{u} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^t$.

Definição 2.2 (Matriz laplaciana e equivalência linear)**.** *A matriz laplaciana de* G *é uma matriz* $n \times n$ *sobre os inteiros dada por* $L = D - A$*, onde* D *é a matriz diagonal* $n \times n$ *para a qual* D_{ii} *é o grau do vértice* i *e* A *é a matriz de adjacência de* G*, isto é, a matriz* $n \times n$ *para a qual* $A_{ij} = 1$ *se existe uma aresta entre o vértice* i *e o vértice* j*, e* 0 *caso contrário. Sejam* $D_1, D_2 \in \mathrm{Div}(G)$ *divisores. Dizemos que* D_1 *é linearmente equivalente a* D_2 *e escrevemos* $D_1 \sim D_2$*, se, para os vetores* $\mathbf{u}_1$ *e* $\mathbf{u}_2$ *com os quais se identificam* D_1 *e* D_2*, respetivamente, existe* $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^n$ *tal que* $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = L\mathbf{u}$*. O vetor* $\mathbf{u}$ *designa-se por* vetor de instruções*.*

Deixamos ao cuidado do leitor a verificação de que a relação estabelecida na definição anterior é uma relação de equivalência.

Ilustremos a definição de equivalência linear no caso em que $D_1 \sim D_2$, com vetor de instruções $\mathbf{u} = \mathbf{u}_i$, o vetor unitário associado a $v_i \in \mathrm{Div}(G)$. Pela definição de matriz laplaciana, $L\mathbf{u}_i$ corresponde ao divisor $rv_i - (v_{j_1} + \cdots + v_{j_r})$, onde $v_{j_1}, \ldots, v_{j_r}$ são os r vizinhos de v_i. Tem-se então:

$$D_1 = D_2 + rv_i - (v_{j_1} + \cdots + v_{j_r})$$

e logo D_1 e D_2 diferem apenas nos vértices $v_i, v_{j_1}, \dots, v_{j_r}$. De facto, pode interpretar-se a mudança como a operação de subtrair uma unidade a cada um dos coeficientes dos vértices $v_{j_1}, \dots, v_{j_r}$ em D_2 e adicionar o total (que é r) ao coeficiente de v_i. Se o vetor de instruções for $\beta_i \mathbf{u}_i$ então $D_1 = D_2 + \beta_i(rv_i - (v_{j_1} + \cdots + v_{j_r}))$ e isso corresponde a subtrair aos coeficientes de cada um dos vértices $v_{j_1}, \dots, v_{j_r}$ em D_2 o inteiro β_i e adicionar o inteiro $\beta_i r$ ao coeficiente de v_i. No caso geral podemos decompor o vetor de instruções $\mathbf{u} = (\beta_1, \dots, \beta_n) = \beta_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \beta_n \mathbf{u}_n$ e realizar a diferença entre D_1 e D_2 como o resultado da sequência de *operações elementares* que correspondem aos vetores de instruções $\beta_1 \mathbf{u}_1, \dots, \beta_n \mathbf{u}_n$.

Definição 2.3. *Seja $D \in \mathrm{Div}(G)$. O* grau *de D é $\deg(D) = \sum_{v \in V_G} D(v)$.*

Como se verifica facilmente, o grau do divisor não é alterado por uma operação elementar. Deduz-se então que se $D_1 \sim D_2$ então $\deg(D_1) = \deg(D_2)$.

Exemplo 2.4 (Jogo de Biggs)**.** *Suponhamos que é dado $D \in \mathrm{Div}(G)$. Então D induz nos vértices de G uma configuração inicial para um jogo de fichas (solitário) sobre G. Os coeficientes positivos de G são representados por igual número de fichas brancas sobre o correspondente vértice. Os coeficientes negativos são representados por fichas pretas sobre o correspondente vértice em número igual ao módulo do coeficiente do vértice. Sobre os vértices cujo coeficiente em D é nulo não há fichas. As jogadas possíveis coincidem com as operações elementares descritas anteriormente, i.e., dado $\beta > 0$ e $v_i \in V_G$ é possível transferir β fichas de uma dada cor de v_i para cada um dos seus vizinhos. (Caso seja necessário podemos criar as fichas da cor necessária para a jogada desejada adicionando no vértice em causa um número igual de fichas brancas e fichas pretas.) O objetivo do jogo (quando for possível) é, partindo da configuração inicial, chegar a uma configuração em que todas as peças sejam brancas.*

Um *jogo* de Biggs completado com sucesso corresponde a uma sucessão de divisores linearmente equivalentes, começando com um divisor não-efetivo e terminando com um efetivo. Trata-se pois de resolver o problema de encontrar na classe de equivalência do divisor da configuração inicial um divisor efetivo. Ora se o grau da configuração inicial for negativo isso é claramente impossível, uma vez que o grau de um divisor efetivo não é negativo. Por outro lado, se o grau da configuração inicial não for negativo nada garante que exista um divisor efetivo na classe de equivalência. É o problema de decidir quando é que isso acontece que motiva a definição de *divisor reduzido num vértice*; definição essa que daremos adiante.

Definição 2.5. *Seja $\mathcal{S} = \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\}$ um conjunto de vértices de G, seja $D \in \mathrm{Div}(G)$ um divisor e seja $\beta \in \mathbb{Z}$, um inteiro.* (i) *O divisor que resulta de* disparar $\mathcal{S}$ com carga β *é o divisor linearmente equivalente a D dado por $D + L\mathbf{u}$ onde $\mathbf{u} = -\beta(\mathbf{u}_{i_1} + \cdots \mathbf{u}_{i_k})$.* (ii) *Dado $v \in \mathcal{S}$, define-se* $\mathrm{outdeg}_{\mathcal{S}}(v)$ *como sendo o número de arestas que partem de v para vértices $w \in V_G \backslash \mathcal{S}$.*

Observe-se que o divisor que se obtém disparando em D um conjunto de vértices $\mathcal{S}$ com carga β pode ser obtido percorrendo os vértices de $\mathcal{S}$ e para cada um, digamos v, subtraindo $\beta\, \mathrm{outdeg}_{\mathcal{S}}(v)$ unidades ao seu coeficiente e adicionando β unidades a cada um dos seus vizinhos *que estiverem fora de S.*

Definição 2.6 (Divisor reduzido)**.** *Dado $D \in \mathrm{Div}(G)$, um subconjunto $\mathcal{S} \subset V_G$ diz-se instável em D se o divisor D' que se obtém disparando $\mathcal{S}$ com carga* 1 *em D satisfizer $D'(w) \geq 0$, para todo o $w \in \mathcal{S}$. No caso contrário, $\mathcal{S}$ diz-se estável em D. Seja $v \in V_G$ um vértice qualquer. D diz-se reduzido em v se* (i) *$D(w) \geq 0$, para todo o $w \in V_G \backslash v$, e* (ii) *todo o subconjunto $\mathcal{S} \subset V_G \backslash v$ é estável.*

Notemos que $\mathcal{S} \subset V_G$ é instável em D se e só se para cada $v \in \mathcal{S}$, $\mathrm{outdeg}_{\mathcal{S}}(v) \leq D(v)$.

Exemplo 2.7. *Consideremos $K_{2,3}$, o grafo bipartido completo com a partição de V_G dada por $V_G = A \sqcup B = \{v_1, v_2\} \sqcup \{v_3, v_4, v_5\}$. Consideremos o divisor $D = -v_1 + 2v_2$. Mostremos que D é reduzido em v_1. Comecemos por notar que $D(w) \geq 0$, $\forall w \in V_G \backslash v_1$. Falta agora verificar que todo o subconjunto $\mathcal{S} \subset V_G \backslash v_1$ é estável em D. Suponhamos que $\mathcal{S} \subset V_G \setminus v_1$, não vazio, é instável. Então $v_3, v_4, v_5 \notin \mathcal{S}$, pois estes vértices são adjacentes a v_1. Consequentemente, $v_2 \notin \mathcal{S}$, pois os seus vizinhos não pertencem a $\mathcal{S}$, o que é um absurdo. Notemos que D não é reduzido em qualquer um dos outros vértices pela simples razão que o coeficiente de v_1 é negativo.*

Proposição 2.8 ([BaNo])**.** *Seja $D \in \mathrm{Div}(G)$ e $v \in V_G$. Então existe um e um só divisor, linearmente equivalente a D, que é reduzido em v.*

Demonstração. Comecemos por provar a existência do reduzido. Dado $w \in V_G$ denotemos por $d(w, v)$ o comprimento do menor caminho entre w e v. Para cada $k \geq 1$ seja V_k o subconjunto de $V_G \setminus v$ dado por

$$V_k = \{w \in V_G \setminus v : d(w, v) = k\}$$

e seja $V_0 = \{v\}$. Então $V_G = \bigsqcup_{i=0}^{\infty} V_k$. De facto, como $V_k \cap V_r = \emptyset$, para $k \neq r$, deduz-se que existe m tal que $V_k = \emptyset$, para todo o $k > m$. Adicionalmente, tomando m o menor dos inteiros com esta propriedade mostra-se que $V_k \neq \emptyset$, para todo o $k \leq m$.

Usando esta decomposição de V_G, é possível obter um divisor $D^\dagger$, linearmente equivalente a D, que satisfaz $D^\dagger(w) \geq 0$, para todo o $w \in V_G \setminus v$, fazendo correr o seguinte algoritmo:

1. Com $k = m-1$, disparem-se os vértices de V_k suficientemente, até que o divisor D_k que se obtém satisfaça $D_k(w) \geq 0$, para todo o $w \in V_{k+1}$.

2. Repita-se o passo (1) sucessivamente, com $k = m-2, m-3, \ldots, 0$.

Como cada iteração do passo (1) é finita, este algoritmo termina. O divisor, $D^\dagger$, que se obtém no final do algoritmo é linearmente equivalente a D. É fácil ver que ao final de cada iteração de (1) os coeficientes de V_{k+1}, $V_{k+2}, \ldots$ são positivos. Logo $D^\dagger(w) \geq 0$ para todo o $w \in V_G \setminus v$.

Fixemos uma ordenação $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \ldots$ dos subconjuntos não vazios de $V_G \setminus v$. O algoritmo seguinte permite calcular, a partir de $D^\dagger$ um divisor D^* linearmente equivalente a $D^\dagger$ que é reduzido em v.

1. Seja $k \geq 1$ o menor k para o qual $\mathcal{S}_k$ é instável em $D^\dagger$. Dispare-se $\mathcal{S}_k$ com carga 1 em $D^\dagger$. Seja D' o divisor obtido.

2. Repita-se o passo (1) com $D^\dagger = D'$.

O algoritmo termina quando não for possível executar (1). Ele produz um divisor linearmente equivalente a $D^\dagger$ (e logo a D) que não possui subconjuntos de vértices $\mathcal{S} \subset V_G \setminus v$ instáveis, pelo que, por definição, é um divisor reduzido em v.

Provemos que este algoritmo termina. Mostremos por indução em $k \geq 1$ que cada vértice em V_k é disparado um número finito de vezes. De cada vez que um vértice $w \in V_1$ é disparado, uma unidade do respetivo coeficiente no divisor corrente é transferida para o coeficiente de v e, nas iterações seguintes, já não regressa aos coeficientes dos vértices em $V_G \setminus v$. Logo os vértices de V_1 são disparados um número finito de vezes. Suponhamos, por hipótese de indução, que os vértices de V_k são disparados um número finito de vezes e seja $w \in V_{k+1}$. Seja $u \in V_k$ um vizinho de w no caminho de menor comprimento que liga w a v. De cada vez que w for disparado é transferida uma unidade do respetivo coeficiente no divisor corrente para o coeficiente de u. Como u é disparado um número finito de vezes após a última iteração em que este for disparado, w só poderá disparar também um número finito de vezes.

Finalmente mostremos que o reduzido de um divisor a respeito de um vértice v é único. Suponhamos que D_1 e D_2 são dois divisores reduzidos em v, linearmente equivalentes. Sejam $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ os vetores correspondentes e $\mathbf{u}$ um vetor tal que $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 + L\mathbf{u}$. Escrevamos $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)^t$. Suponhamos, com vista a um absurdo, que $D_1 \neq D_2$. Então $L\mathbf{u} \neq 0$ e logo entre $u_1, \ldots, u_n$ há dois inteiros distintos. Seja $u^* = \max\{u_1, \ldots, u_n\}$ e seja $\mathcal{I} = \{i : u_i = u^*\} = \{i_1, \ldots, i_r\}$. Consideremos o conjunto de vértices:

$$\mathcal{S} = \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_r}\}.$$

Trocando D_1 com D_2, se necessário, podemos supor que $v \notin \mathcal{S}$. Seja $v_{i_k} \in \mathcal{S}$ e sejam $\{v_{j_1}, \ldots, v_{j_s}\}$ os seus vizinhos. Como $D_2 = D_1 + L\mathbf{u}$ obtém-se:

$$\begin{aligned} D_2(v_{i_k}) &= D_1(v_{i_k}) + s u_{i_k} - u_{j_1} - \cdots - u_{j_s} \\ &= D_1(v_{i_k}) + (u^* - u_{j_1}) + \cdots + (u^* - u_{j_s}). \end{aligned}$$

Ora, na expressão $(u^* - u_{j_1}) + \cdots + (u^* - u_{j_s})$ cada parcela é ≥ 0 e é estritamente maior que zero exatamente quando o elemento correspondente de $\{v_{j_1}, \ldots, v_{j_s}\}$ não pertence a $\mathcal{S}$. Deduz-se então que

$$D_2(v_{i_k}) \geq D_1(v_{i_k}) + \mathrm{outdeg}_{\mathcal{S}}(v_{i_k}) \geq \mathrm{outdeg}_{\mathcal{S}}(v_{i_k}),$$

ou seja, que $\mathcal{S}$ é instável em D_2, o que é um absurdo. □

Denotaremos o reduzido de um divisor $D \in \mathrm{Div}(G)$ em v por $\mathrm{red}(D, v)$. O facto que para cada $v \in V_G$ existe um único divisor reduzido em v linearmente equivalente a D permite responder à questão introduzida anteriormente de saber quando é que existe, na classe de equivalência de D, um divisor efetivo. Se um tal divisor existe, então ele pode ser usado para calcular o reduzido em v que, pelo algoritmo descrito na demonstração da proposição anterior, é necessariamente efetivo. Obtém-se assim a seguinte proposição.

Proposição 2.9. *Seja $D \in \mathrm{Div}(G)$ e $v \in V_G$. Então D é linearmente equivalente a um divisor efetivo se e só se $\mathrm{red}(D, v)$ for efetivo.* □

Como aplicação, notemos que, pelo que foi dito no Exemplo 2.7, o divisor $-v_1 + 2v_2$ no grafo $G = K_{2,3}$ não é linearmente equivalente a um divisor efetivo, uma vez que ele mesmo é reduzido em v_1 e não é efetivo. Notemos que isto implica que para o grafo $K_{2,3}$ o jogo de Biggs com a configuração inicial correspondente a $-v_1 + 2v_2$ é *impossível*.

Definição 2.10. *Seja $D \in \mathrm{Div}(G)$. O* sistema linear associado a D, *que se denota por $|D|$ é o conjunto de todos os divisores efetivos linearmente equivalentes a D. Isto é,*

$$|D| = \{D' \in \mathrm{Div}(G) : D' \geq 0, D' \sim D\}.$$

A dimensão *de* $|D|$ *é* -1 *se* $|D| = \emptyset$*, ou, no caso contrário, é o maior inteiro k tal que, para todos os divisores efetivos E de grau k,* $D - E$ *seja linearmente equivalente a um divisor efetivo. A dimensão de* $|D|$*, que não depende do divisor escolhido em* $|D|$ *denota-se por* $r(D)$*. O* grau *de* $|D|$ *é, por definição,* $\deg(D)$*, que é o grau de todos os divisores em* $|D|$*.*

Como já observámos, se $\deg(D) < 0$ deduz-se que $r(D) = -1$. O mesmo tipo de raciocínio permite concluir que se $r(D) \neq -1$ então necessariamente $\deg(D) \geq r(D)$. No entanto, $\deg(D) \geq 0$ não garante que $r(D) \neq -1$; tome-se, por exemplo, $D = -v_1 + 2v_2$ no grafo bipartido completo $K_{2,3}$, como vimos anteriormente.

Notemos que a Proposição 2.9 pode ser reformulada usando a terminologia introduzida na definição anterior: $r(D) \geq 0$ se e só se, dado $v \in V_G$, $\operatorname{red}(D, v)$ for efetivo. Os divisores com $r(D) \geq 1$ também podem ser caracterizados usando a noção de reduzido, como se mostra na proposição seguinte.

Proposição 2.11. *Seja D um divisor de um grafo G. Então* $r(D) \geq 1$ *se e só se para todo o* $v \in V_G$*,* $\operatorname{red}(D, v)$ *é efetivo e o coeficiente de v em* $\operatorname{red}(D, v)$ *é positivo.*

Demonstração. Suponhamos que para todo o $v \in V_G$, $\operatorname{red}(D, v)$ é efetivo e o coeficiente de v neste divisor é positivo. Então, para cada v, $\operatorname{red}(D, v) - v$ é efetivo. Como temos $D - v \sim \operatorname{red}(D, v) - v$ conclui-se que $D - v$ é linearmente equivalente a um divisor efetivo. Logo $r(D) \geq 1$. Reciprocamente, suponhamos que $r(D) \geq 1$ e seja $v \in V_G$. Como o reduzido em v é único, podemos, sem perda de generalidade, supor que D é efetivo. Pela Proposição 2.9 sabemos que $\operatorname{red}(D - v, v)$ é efetivo. Mas, como D é efetivo, $\operatorname{red}(D - v, v) = \operatorname{red}(D, v) - v$. Logo $\operatorname{red}(D, v)$ é efetivo e o coeficiente de v neste divisor tem de ser positivo. □

3 Teorema de Riemann–Roch

Definição 3.1. *O género de G, que se denota por g, é* $|E_G| - |V_G| + 1$*.*

Esta terminologia vem da Geometria Algébrica. Em teoria de grafos o inteiro g definido acima é conhecido por *número ciclomático*. Ele coincide com o *primeiro número de Betti* do complexo simplicial que está canonicamente associado a G; designação essa que também é habitual. O número ciclomático é o menor número de arestas que é necessário retirar a G para que o resultado seja um grafo sem ciclos. Em particular tem-se que $g = 0$ se e só se G é uma árvore.

O divisor canónico, que definiremos de seguida, tal como numa variedade algébrica, tem um papel importante no Teorema de Riemann–Roch.

Definição 3.2. *O* divisor canónico *de* G *é* $K_G = \sum_{v \in V_G} (\deg(v) - 2)v$.

Observe-se que K_G é um divisor com grau $2|E_G| - 2|V_G| = 2g - 2$. Veremos adiante que $r(K_G) = g - 1$. Observe-se que isto é fácil de verificar no caso em que $g = 0$. No caso $g = 1$, $r(K_G) = 0$ diz-nos que K_G, que é um divisor de grau 0, é linearmente equivalente a um divisor efetivo, que só pode ser o próprio divisor 0. Logo $K_G \sim 0$.

A próxima definição e as proposições seguintes estabelecem as noções e resultados necessários à demonstração de Baker e Norine do Teorema de Riemann–Roch num grafo. Estes tipo de divisor será também usado na nossa demonstração da Proposição 4.5.

Definição 3.3. *Seja* $\pi \in S_n$ *uma permutação do conjunto* $\{1, \ldots, n\}$. *O divisor associado a* π, *que se denota por* D_π, *é o divisor*

$$D_\pi = \textstyle\sum_{i=1}^n (\alpha_i^\pi - 1) v_{\pi(i)},$$

onde α_i^π *é o número de vértices do conjunto* $\left\{v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(i-1)}\right\}$ *adjacentes a* $v_{\pi(i)}$.

Proposição 3.4 ([BaNo])**.** *Tem-se* $\deg(D_\pi) = g - 1$ *e* $r(D_\pi) = -1$.

Demonstração. Temos $\deg(D_\pi) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i^\pi - 1) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^\pi - |V_G|$. O inteiro α_i^π conta o número de arestas de G que com extremidade em $v_{\pi(i)}$ e num dos vértices $v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(i-1)}$. Logo, na soma $\sum_{i=1}^n \alpha_i^\pi$ cada aresta de G é contada exatamente uma vez. Conclui-se que $\deg(D_\pi) = |E_G| - |V_G| = g - 1$.

Mostremos agora que $r(D_\pi) = -1$. Seja $D \in \mathrm{Div}(G)$ tal que $D \sim D_\pi$. Mostremos que D não é efetivo. Seja $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)^t$ dado por $D \sim D_\pi$. Seja $u^* = \max\{u_1, \ldots, u_n\}$ e seja $\mathcal{I} = \left\{i : u_{\pi(i)} = u^*\right\} = \{i_1, \ldots, i_r\}$, com $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$. Sejam $j_1 < \cdots < j_s < i_1 < j_{s+1} < \cdots < j_t$ tais que $\{v_{\pi(j_1)}, \ldots, v_{\pi(j_s)}\} \cup \{v_{\pi(j_{s+1})}, \ldots, v_{\pi(j_t)}\}$ sejam os vizinhos de v_{i_1}. Notemos que $s = \alpha_i^\pi$. Temos:

$$\begin{aligned} D(v_{\pi(i_1)}) &= D_\pi(v_{\pi(i_1)}) - L\mathbf{u} \\ &= \alpha_{i_1}^\pi - 1 - \left(tu_{\pi(i_1)} - \textstyle\sum_{k=1}^t u_{\pi(j_k)}\right) \\ &= s - 1 + \textstyle\sum_{k=1}^t (u_{\pi(j_k)} - u_{\pi(i_1)}) \\ &= -1 + \textstyle\sum_{k=1}^s (u_{\pi(j_k)} - u_{\pi(i_1)} + 1) + \sum_{k=s+1}^t (u_{\pi(j_k)} - u_{\pi(i_1)}). \end{aligned}$$

Como, para todo o $k \in \{1, \ldots, s\}$, $j_k \notin \mathcal{I}$, temos $u_{\pi(j_k)} - u_{\pi(i_1)} + 1 \leq 0$. Deduz-se que $D(v_{\pi(i_1)}) \leq -1$. □

Proposição 3.5 ([BaNo])**.** *Seja π uma permutação dos vértices de V_G e seja $\overline{\pi}$ a permutação dada por $\overline{\pi}(i) = \pi(n - i + 1)$. Então $D_\pi + D_{\overline{\pi}} = K_G$.*

Demonstração. Fixemos i e j tais que $\pi(i) = \overline{\pi}(j) = \pi(n-j+1)$. Então α_i^π conta o número de vértices $\left\{v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(i-1)}\right\}$ adjacentes a $v_{\pi(i)}$. Por outro lado $\alpha_{n-i+1}^{\overline{\pi}}$ conta o número de vértices em $\left\{v_{\pi(n)}, v_{\pi(n-1)}, \ldots, v_{\pi(i+1)}\right\}$ adjacentes a $v_{\pi(i)}$. Ou seja, $\alpha_i^\pi + \alpha_{n-i+1}^{\overline{\pi}} = \deg(v_{\pi(i)})$. Tem-se então: $D_\pi + D_{\overline{\pi}} = \sum_{i=1}^n (\deg(v_{\pi(i)}) - 2) v_{\pi(i)} = K_G$. □

Proposição 3.6 ([BaNo])**.** *Dado $D \in \mathrm{Div}(G)$ tem-se uma e uma só das seguintes afirmações: ou $r(D) \geq 0$ ou existe $\pi \in S_n$ tal que $r(D_\pi - D) \geq 0$.*

Demonstração. Basta-nos provar a equivalência

$$r(D) = -1 \iff \exists \pi \in S_n \text{ tal que } r(D_\pi - D) \geq 0.$$

Se existe $\pi \in S_n$ tal que $r(D_\pi - D) \geq 0$ então existe um divisor E_1 efetivo tal que $D_\pi - D \sim E_1$. Se, com vista a um absurdo, tivéssemos $r(D) \geq 0$, então existiria E_2, efetivo tal que $D \sim E_2$. Ora isso implicaria que $D_\pi = D_\pi - D + D \sim E_1 + E_2$, o que é falso pois $r(D_\pi) = -1$, pela Proposição 3.4.

Suponhamos que $r(D) = -1$. Fixemos $v_{\pi(1)} \in V_G$ qualquer e seja $D' = \mathrm{red}(D, v_{\pi(1)})$. Consideremos $\mathcal{S}_1 = V_G \backslash v_{\pi(1)}$. Como $\mathcal{S}_1$ é um conjunto estável em D', existe $v_{\pi(2)} \in \mathcal{S}_1$ tal que $\mathrm{outdeg}_{\mathcal{S}_1}(v_{\pi(2)}) > D'(v_{\pi(2)})$. O conjunto $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_1 \setminus v_{\pi(2)}$ também é estável em D' pelo que existe $v_{\pi(3)} \in \mathcal{S}_2$ tal que $\mathrm{outdeg}_{\mathcal{S}_2}(v_{\pi(3)}) > D'(v_{\pi(3)})$. Continuando assim, até à exaustão de todos os vértices de G, obtêm-se

$$\left\{v_{\pi(n)}\right\} = \mathcal{S}_n \subsetneq \mathcal{S}_{n-1} \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{S}_1 \subsetneq V_G$$

e uma permutação $\pi \in S_n$ que satisfaz:

$$\text{outdeg}_{\mathcal{S}_{i-1}}(v_{\pi(i)}) > D'(v_{\pi(i)}) \ \forall_{i=2,\ldots,n}. \tag{3.1}$$

Mostremos que $D_\pi - D'$ é efetivo. Como, por hipótese, D não é linearmente equivalente a um divisor efetivo, temos $D'(v_{\pi(1)}) < 0$ e logo

$$D_\pi(v_{\pi(1)}) - D'(v_{\pi(1)}) = \alpha_1^\pi - 1 - D'(v_{\pi(1)}) = -1 - D'(v_{\pi(1)}) \geq 0.$$

Fixemos agora $i \in \{2, \ldots, n\}$. Como α_i^π é o número de vértices em $\left\{v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(i-1)}\right\}$ adjacentes a $v_{\pi(i)}$ e como $\left\{v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(i-1)}\right\} = V_G \setminus \mathcal{S}_{i-1}$ temos $\alpha_i^\pi = \text{outdeg}_{\mathcal{S}_{i-1}}(v_{\pi(i)})$. Logo, usando (3.1) obtém-se:

$$D_\pi(v_{\pi(i)}) - D'(v_{\pi(i)}) = \alpha_i^\pi - 1 - D'(v_{\pi(i)}) = \text{outdeg}_{\mathcal{S}_{i-1}}(v_{\pi(i)}) - D'(v_{\pi(i)}) - 1 \geq 0.$$

Em conclusão, $D_\pi - D'$ é efetivo e logo $r(D_\pi - D) \geq 0$. □

Dado $D \in \text{Div}(G)$, denotemos por $\deg^+(D)$ a soma dos coeficientes positivos de D.

Proposição 3.7 ([BaNo]).

$$r(D) = \min\left\{\deg^+(D' - D_\pi) - 1 : D' \sim D \ e \ \pi \in S_n\right\}.$$

Demonstração. Seja $R = \min\{\deg^+(D' - D_\pi) - 1 : D' \sim D \text{ e } \pi \in S_n\}$. Consideremos $D' \sim D$ e $\pi \in S_n$, tal que $\deg^+(D' - D_\pi) = R + 1$. Seja $E \in \text{Div}(G)$ o divisor definido por $E(v) = D'(v) - D_\pi(v)$, se $D'(v) - D_\pi(v) \geq 0$ e $E(v) = 0$, no caso contrário. Então E é efetivo e $\deg(E) = \deg^+(D' - D_\pi) = R + 1$. Seja E' o divisor efetivo definido por $D' - D_\pi = E - E'$. Então $D - E \sim D' - E = D_\pi - E'$, que se fosse linearmente equivalente a um divisor efetivo implicaria que $r(D_\pi) > 0$, o que, pela Proposição 3.4, é falso. Logo $r(D) \leq R$. Suponhamos, com vista a um absurdo que $r(D) < R$. Seja E, um divisor efetivo de grau R, para o qual $r(D - E) = -1$. Pela Proposição 3.6, existe uma permutação $\pi \in S_n$ e um divisor efetivo E' tal que $D_\pi - D + E \sim E'$. Seja $D' = D_\pi + E - E'$ que é linearmente equivalente a D. Então

$$\deg^+(D' - D_\pi) - 1 = \deg^+(E - E') - 1 = R - 1,$$

o que é um absurdo. □

Teorema 3.8 (Teorema de Riemann–Roch, [BaNo]). *Seja $D \in \text{Div}(G)$ então*

$$r(D) - r(K_G - D) = \deg(D) + 1 - g.$$

Demonstração. Pela Proposição 3.7, existe um divisor D' linearmente equivalente a D e uma permutação $\pi \in S_n$ tais que tais que $r(D) = \deg^+(D' - D_\pi) - 1$. Seja $\overline{\pi}$ a permutação dada por $\overline{\pi}(i) = \pi(n - i + 1)$. Tem-se então:

$$\begin{aligned} r(D) - r(K_G - D) &= \deg^+(D' - D_\pi) - 1 - r(K_G - D) \\ &\geq \deg^+(D' - D_\pi) - 1 - \deg^+(K_G - D' - D_{\overline{\pi}}) + 1 \\ &= \deg^+(D' - D_\pi) + \deg^+(D_\pi - D') = \deg(D' - D_\pi) \\ &= \deg(D) - g + 1. \end{aligned}$$

Tomando esta desigualdade com $K_G - D$ no lugar de D obtém-se

$$\begin{gathered} r(K_G - D) - r(D) \geq \deg(K_G - D) - g + 1 = g - 1 - \deg(D) \\ \iff r(D) - r(K_G - D) \leq \deg(D) + 1 - g, \end{gathered}$$

obtendo-se assim a igualdade pretendida. □

Corolário 3.9. $r(K_G) = g - 1$

Demonstração. Basta fazer $D = 0$ na fórmula do Teorema de Riemann–Roch. □

Observe-se que quando $\deg(D) > 2g - 2$ o valor de $r(D)$ é ditado pela fórmula do Teorema de Riemann–Roch, ou seja, $r(D) = \deg(D) - g$.

4 Gonalidade de um grafo

Definição 4.1. *A gonalidade de G é o menor inteiro $d > 0$ para o qual existe um divisor de grau d que gera um sistema linear de dimensão ≥ 1.*

Dado um grafo arbitrário de género $g \geq 2$, é um problema difícil determinar a sua gonalidade. No que se segue daremos uma caracterização do caso em que a gonalidade é 1 e ilustraremos o caso em que a gonalidade é 2. Terminamos com o cálculo da gonalidade de um grafo bipartido completo.

Proposição 4.2. *A gonalidade de G é igual a 1 se e só se $g = 0$.*

Demonstração. Mostremos que G tem um divisor de dimensão ≥ 1 e grau 1 se e só se quaisquer dois vértices de G forem linearmente equivalentes. Se D for um divisor efetivo de grau 1 que gera um sistema linear de dimensão 1 então existe $v \in V_G$ tal que $D = v$ e para todo o $w \in V_G$, $v - w \sim E$, com E um divisor efetivo. Como E tem grau zero, $E = 0$ e logo $v \sim w$, para todo o $w \in V_G$. Em particular, $K_G = (2g-2)D$. Pelo Teorema de Riemann–Roch obtém-se $r((2g-3)D) = 1 - g$, o que só é possível no caso $g = 0$. Reciprocamente, se $g = 0$ e $D = v$ então, novamente pelo Teorema de Riemann–Roch, $r(D) = \deg(D) - g = 1$ e logo a gonalidade de G é 1. □

Proposição 4.3. *Se G tem género 1 então a sua gonalidade é 2.*

Demonstração. Seja D um divisor de grau 2 em G. Usando o Teorema de Riemann–Roch obtém-se $r(D) = r(K_G - D) + 2 \geq 1$. Logo, a gonalidade de G é ≤ 2. Usando a proposição anterior, conclui-se que a gonalidade de G é 2. □

No caso em que G é um ciclo, é fácil mostrar explicitamente, sem recurso ao Teorema de Riemann–Roch, que qualquer divisor efetivo de grau 2 gera um sistema linear de dimensão ≥ 1. De facto, se D é efetivo e tem grau 2 então ou $D = 2w$ para algum $w \in V_G$ ou então $D = w_1 + w_2$ com $w_1 \neq w_2$. Seja $v \in V_G$ qualquer. Queremos mostrar que $D - v$ é linearmente equivalente a um divisor efetivo, ou seja, que existe um divisor efetivo D' tal que $D \sim D'$ e tal que o coeficiente de v em D' seja diferente de 0. Suponhamos então que $D(v) = 0$ e consideremos, no primeiro caso o conjunto $\{w\}$ e, no segundo caso, o conjunto dos vértices no arco de G definido por w_1 e w_2 que *não* contém v. Este conjunto é instável em D e logo pode ser disparado. Essa ação produz um novo divisor de grau 2 linearmente equivalente a D ao qual se pode aplicar o mesmo raciocínio. Procedendo-se desta forma, o número suficiente de vezes, obtém-se D', linearmente equivalente a D, com $D'(v) > 0$.

Ao contrário do caso da gonalidade 1, existem grafos de gonalidade 2 para todos os valores de $g \geq 2$. Deixamos ao leitor o cuidado de verificar que o grafo da Figura 1 possui um sistema linear de grau 2 e dimensão ≥ 1.

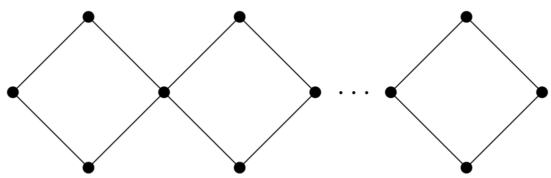

Figura 1: Um grafo de género $g \geq 2$ e gonalidade 2.

O teorema seguinte é uma versão combinatória do *Teorema de Existência* da Teoria de Brill–Noether sobre curvas algébricas. A demonstração de [Ca] usa Geometria Algébrica.

Teorema 4.4 ([Ca, Theorem 6.3]). *Sejam g, d, r inteiros positivos com*

$$g - (r+1)(g-d+r) \geq 0$$

e $g \geq 2$. Então todo o grafo G de género g possui um sistema linear de grau d e dimensão $\geq r$. □

Se $r = 1$ e d for tal que $2d \geq g + 2$ então

$$g - (r+1)(g-d+r) = -g + 2(d-1) \geq 0.$$

Deduz-se do teorema que qualquer grafo de género $g \geq 2$ possui um sistema linear de dimensão ≥ 1 e grau d, com $2d \geq g+2$. Conclui-se que a gonalidade de um grafo de género $g \geq 2$ é no máximo $\lfloor \frac{g+3}{2} \rfloor$. Em [CDPR] mostra-se que o grafo que se obtém a partir do grafo da Figura 1 subdividindo as suas arestas (introduzindo vértices de grau 2) de forma suficientemente genérica tem gonalidade $\lfloor \frac{g+3}{2} \rfloor$.

Em [Ba] o autor mostra que a gonalidade de um grafo completo K_n é $n-1$. O próximo resultado estabelece a gonalidade de um grafo bipartido completo. A demonstração que apresentamos segue de perto a demonstração de [Ba] para o grafo completo. Este resultado foi também obtido em [DdB].

Proposição 4.5 ([DdB]). *A gonalidade de um grafo bipartido completo $G = K_{a,b}$ é $\min\{a, b\}$.*

Demonstração. Seja $V_G = A \cup B$ a partição dos vértices de V. Sem perda de generalidade, suponhamos que $a = |A| \leq |B| = b$ e que na ordenação dos vértices de G se tem $A = \{v_1, \ldots, v_a\}$. Seja $D = v_1 + \cdots + v_a$. Pela Proposição 2.9, para mostrar que D gera um sistema linear de dimensão ≥ 1 basta verificar que para todo o $v \in V_G$ este vértice pertence ao suporte de $\operatorname{red}(D, v)$. Isto é trivialmente verdade se $v \in A$. Se $v \in B$ então o conjunto $\mathcal{S} = V_G \setminus v$ é instável e o divisor que se obtém disparando $\mathcal{S}$ em D com carga 1, que é o divisor $D' = av$, é o reduzido de D em v.

Mostremos agora que todo o divisor D de grau $d < a$ satisfaz $r(D) \leq 0$. Seja D um divisor de grau $d < a$. Se D não for linearmente equivalente a um divisor efetivo então $r(D) = -1$ e já terminamos. Caso contrário podemos supor D efetivo. Consideremos uma permutação $\pi \in S_n$ (esta não é necessariamente única) tal que

$$D(v_{\pi(1)}) \leq D(v_{\pi(2)}) \leq \cdots \leq D(v_{\pi(a+b)}). \tag{4.1}$$

Como pelo menos um vértice de cada um dos conjuntos A e B tem um coeficiente 0 em D, já que $\deg(D) < a \leq b$, podemos supor que $v_{\pi(1)} \in A$ e $v_{\pi(2)} \in B$. Calculemos estimativas para os coeficientes α_i^π do divisor D_π. Como para qualquer outra permutação temos $\alpha_1^\pi = 0$. Uma vez que $v_{\pi(1)} \in A$ e $v_{\pi(2)} \in B$ tem-se $\alpha_j^\pi \geq 1$, para $j \in \{2, \ldots, b+1\}$. Finalmente como, na pior das hipóteses $v_{\pi(2)}, \ldots, v_{\pi(b+1)}$ são os vértices de B, temos $\alpha_{b+i}^\pi \geq i$, para $i \in \{2, \ldots, a\}$. Por outro lado, atendendo ao grau de D, das desigualdades (4.1) obtém-se:

$$D(v_{\pi(1)}) = D(v_{\pi(2)}) = \cdots = D(v_{\pi(b+1)}) = 0 \quad \text{e}$$
$$D(v_{\pi(b+i)}) < i, \; \forall \, i \in \{2, \ldots, a\}\,.$$

Deduz-se então que $D_\pi - D + v_{\pi(1)}$ é um divisor efetivo. Pela Proposição 3.6 tem-se que $r\left(D - v_{\pi(1)}\right) = -1$ donde se conclui que $r(D) = 0$. $\square$

Agradecimentos

A primeira autora foi financiada pela Fundação Calouste Gulbenkian através do programa Novos Talentos em Matemática 2013/2014 e pela FCT através do projeto PTDC/MAT-GEO/0675/2012. O segundo autor foi financiado parcialmente pelo projeto PTDC/MAT-GEO/0675/2012 e pelo Centro de Matemática da Universidade de Coimbra (CMUC) – UID/MAT/00324/2013, financiado pelo Governo de Portugal através da FCT/MEC e cofinanciado pelo Fundo de Desenvolvimento Regional Europeu através do acordo de parceria PT2020.

Referências

[Ba] M. Baker, *Specialization of linear systems from curves to graphs.* (With an appendix by Brian Conrad.) Algebra Number Theory 2 (2008), no. **6**, 613–653.

[BaNo] M. Baker and S. Norine, *Riemann-Roch and Abel-Jacobi theory on a finite graph.* Adv. Math. 215 (2007), n. **2**, 766–788.

[Ca] L. Caporaso, *Algebraic and combinatorial Brill-Noether theory.* In Compact Moduli Spaces and Vector Bundles, 6. V. Alexeev, E. Izadi, A. Gibney, J. Kollár, E. Loojenga (Eds.), Compact moduli spaces and vector bundles, 69–85, Contemp. Math., 564, AMS Providence, RI, 2012.

[CDPR] F. Cools, J. Draisma, S. Payne and E. Robeva *A tropical proof of the Brill–Noether theorem.* Adv. Math. 230 (2012), n. **2**, 759-776.

[DdB] J. van Dobben de Bruyn *Reduced divisors and gonality in finite graphs* Bachelor's Thesis. Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden, 2012.

[JePa] D. Jensen and S. Payne, *Tropical independence I: Shapes of divisors and a proof of the Gieseker-Petri theorem.* Algebra Number Theory 8 (2014), no. **9**, 2043–2066.