A DESIGUALDADE DE KARAMATA

Amílcar Branquinho
Universidade de Coimbra
ajplb@mat.uc.pt

Jorge Neves
Universidade de Coimbra
neves@mat.uc.pt

"There are three great pillars of the theory of inequalities: positivity, monotonicity and convexity."
J. Michael Steele

INTRODUÇÃO

Uma boa estimativa vale ouro; a sua construção requer profunda intuição das grandezas envolvidas. Numa cadeia de estimativas, cada elo deve ser o melhor possível para não pôr em risco a demonstração da desigualdade desejada... isto se ela for verdadeira.

Saber estimar bem, munir-se das desigualdades certas é crucial para quem queira entrar no mundo da Análise Real. Existem inúmeras desigualdades notáveis, e muitas elementares, que têm um lugar especial na resolução de problemas de matemática olímpica.

Propomo-nos traçar um caminho por algumas desigualdades bem conhecidas, terminando com aquela que dá nome a este canto.

DESIGUALDADE DOS REARRANJOS

Seja n um inteiro positivo e sejam $a_1, \dots, a_n$ e $b_1, \dots, b_n$ duas sequências de números reais.

> *Qual é o emparelhamento dos termos de $a_1, \dots, a_n$ com os termos de $b_1, \dots, b_n$ para o qual a soma dos produtos de pares de números é maior? E qual é o emparelhamento para o qual a soma dos produtos é menor?*

A desigualdade dos rearranjos diz que, para qualquer escolha do emparelhamento, a soma dos produtos de pares é sempre menor do que aquela obtida ordenando ambas as sequências pela ordem decrescente (ou crescente) e maior do que aquela obtida mantendo a ordem numa das sequências e invertendo-a na outra.

Para formalizar esta ideia, suponhamos, sem perda de generalidade, que

$$a_1 \geq \cdots \geq a_n \text{ e } b_1 \geq \cdots \geq b_n.$$

A desigualdade dos rearranjos diz então que, para toda a permutação σ dos índices $1, \dots, n$,

$$\sum_{j=1}^{n} a_j\, b_{n-j+1} \leq \sum_{j=1}^{n} a_j\, b_{\sigma(j)} \leq \sum_{j=1}^{n} a_j\, b_j\,. \tag{1}$$

Notemos que, à primeira vista, é surpreendente que estas estimativas se mantenham verdadeiras independentemente da existência de números negativos entre os termos destas sequências. Demonstraremos esta desigualdade mais adiante. Até lá, pense em como o faria.

DESIGUALDADE MG – MA

Uma ideia recorrente na manipulação de uma desigualdade na sua forma geral é a de tomar casos especiais das variáveis envolvidas, uma técnica que se poderia designar por *especialização*.

Suponhamos que $a_1, \dots, a_n > 0$ e tomemos

$$b_j = \tfrac{1}{a_j}\,, \quad j = 1, \dots, n\,.$$

A ordenação decrescente dos termos de $a_1, \dots, a_n$ produz em $b_1, \dots, b_n$ a ordenação crescente. Deduz-se então da desigualdade dos rearranjos que

$$n \leq \frac{a_1}{a_{\sigma(1)}} + \frac{a_2}{a_{\sigma(2)}} + \frac{a_3}{a_{\sigma(3)}} + \cdots + \frac{a_n}{a_{\sigma(n)}},$$

para qualquer permutação, σ, dos índices $1, \ldots, n$. Em particular, tem-se que

$$n \leq \frac{a_1}{a_n} + \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_2} + \cdots + \frac{a_n}{a_{n-1}}. \qquad (2)$$

Sejam agora ρ e $x_1, \ldots, x_n$ reais positivos quaisquer e tomemos na desigualdade (2)

$$a_j = \rho^j \, x_1 \cdots x_j \,, \;\; j = 1, \ldots, n\,.$$

Obtém-se:

$$n \leq \frac{\rho \, x_1}{\rho^n \, x_1 \cdots x_n} + \rho \, x_2 + \cdots + \rho \, x_n\,.$$

Fazendo $\rho = 1/\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$ e simplificando, obtemos:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n},$$

que é a famosa desigualdade entre a média geométrica de n números reais, no primeiro membro, e a média aritmética de n números reais, no segundo membro. (*Cf.*[1].)

DEMONSTRAÇÃO DA DESIGUALDADE DOS REARRANJOS

A demonstração desta desigualdade assenta na seguinte observação. Dadas duas sequências de números reais, $x_1, \ldots, x_n$ e $y_1, \ldots, y_n$, a soma

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

pode ser calculada a partir da *fórmula de Abel de soma por partes*:

$$\begin{aligned} & x_n(y_1 + \cdots + y_n) \\ & + (x_{n-1} - x_n)(y_1 + \cdots + y_{n-1}) \\ & + (x_{n-2} - x_{n-1})(y_1 + \cdots + y_{n-2}) \qquad (3) \\ & \vdots \\ & + (x_1 - x_2) y_1\,. \end{aligned}$$

Consideremos, pois, $a_1, \ldots, a_n$ e $b_1, \ldots, b_n$, sequências decrescentes de números reais, e substitua-se em (3) $x_1, \ldots, x_n$ por $a_1, \ldots, a_n$ e $y_1, \ldots, y_n$ por qualquer permutação de $b_1, \ldots, b_n$, dada por uma permutação, σ, dos índices $1, \ldots, n$.

Como $b_1, \ldots, b_n$ é decrescente, temos

$$b_1 + \cdots + b_k \geq b_{\sigma(1)} + \cdots + b_{\sigma(k)} \geq b_{n-k+1} + \cdots + b_n$$

para todo o $k = 1, \ldots, n$. Por outro lado, como $a_1, \ldots, a_n$ também é decrescente, temos

$$a_k - a_{k+1} \geq 0,$$

para todo o $k = 1, \ldots, n-1$. Deduz-se então que (3) será máxima se tomarmos $\sigma(k) = k$ e mínima se tomarmos $\sigma(k) = n - k + 1$. □

FUNÇÕES CONVEXAS

A convexidade de funções é uma noção com uma definição extremamente simples, pelo que é surpreendente a profundidade dos resultados que ela origina.

Definição. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ diz-se *convexa* se, para quaisquer $a, b \in I$ e para todo o $\lambda \in [0, 1]$, se tiver

$$f(\lambda\, a + (1-\lambda)\, b) \leq \lambda\, f(a) + (1-\lambda)\, f(b)\,. \qquad (4)$$

Diremos ainda que f é *côncava* se $-f$ for convexa.

Há muitas desigualdades notáveis que na sua formulação envolvem uma função convexa. A desigualdade que dá o título a este canto é um exemplo, como veremos. Outra é a que se obtém como consequência imediata da definição de convexidade e que pode ser demonstrada a partir daquela por indução matemática: para qualquer função convexa f e quaisquer $x_1, \ldots, x_n \in I$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ tais que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, tem-se

$$f\Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, x_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, f(x_j)\,. \qquad (5)$$

Esta desigualdade é conhecida por *desigualdade de Jensen*. Ela é apenas uma entre várias cuja demonstração se atribui a Jensen, muitas delas com aplicações importantes em todo o edifício matemático.

Johan Ludwig Jensen (1859-1925) foi um matemático dinamarquês que, pela relevância dos seus trabalhos em ciência e engenharia, entrou para o panteão cultural da Dinamarca. Nos anos 90 do século XX, o Departamento de Matemática da Universidade de Copenhaga homenageou este matemático com um selo de correio alusivo ao seu trabalho. Na imagem que vemos abaixo não é possível ver uma outra inscrição que foi feita, e que traduzida para a nossa língua seria: "Jensen foi dinamarquês".

Geometricamente, a definição anterior diz-nos que uma função é convexa se, para quaisquer $a, b \in I$, o segmento de reta que une os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ está acima do gráfico de *f*. Sendo esse segmento dado por:

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a), \; x \in [a, b],$$

tem-se então

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \geq f(x), \; x \in [a, b],$$

ou ainda, trabalhando um pouco a expressão,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \; x \in]a, b].$$

Não é difícil ver que este tipo de raciocínio nos leva uma formulação equivalente da convexidade, usando a *razão diferencial* de *f*,

$$\Delta f(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}, \quad \text{com} \quad x \neq y.$$

Exercício. *Mostre que f é convexa em I se, e só se, para todo o $y \in I$ (fixo), a função $\Delta f(x, y)$ for crescente na variável $x \in I \setminus \{y\}$.*

Uma vez que a razão diferencial é simétrica nas duas variáveis, deduz-se também que f é convexa se, e só se, fixando x, $\Delta f(x, y)$ for crescente em y.

Esta caracterização da convexidade permite verificar que a função $f(x) = x^n$, com $n \geq 1$, é convexa em $\mathbb{R}^+$. De facto, dados $x \neq y$, reais positivos, tem-se

$$\Delta f(x, y) = \frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1},$$

pelo que $\Delta f(x, y)$ é crescente na variável y, fixando x, e *vice-versa*.

Exercício. *Verifique que a função $f(x) = \sqrt{x}$ é côncava.*

Analisemos agora uma caracterização da convexidade de funções diferenciáveis:

Se f for diferenciável em I, então f é convexa se, e somente se, f′ for uma função crescente.

Demonstração. Suponhamos que f' é crescente em I. Tomem-se $x, y, z \in I$ com

$$x < y < z.$$

Então, pelo teorema do valor médio de Lagrange, existem x^*, y^* com $x < x^* < y < y^* < z$ tais que

$$\Delta f(x, y) = f'(x^*) \leq f'(y^*) = \Delta f(z, y).$$

Logo, a razão diferencial é crescente na primeira variável, pelo que se conclui que *f* é convexa. Reciprocamente, suponhamos que *f* é convexa. Sejam $x, y, u, v \in I$ com

$$x < y < u < v.$$

Então, como a razão diferencial é crescente em qualquer das variáveis, tem-se

$$\Delta f(x, y) \leq \Delta f(x, v) \leq \Delta f(u, v).$$

Logo, fixando x e v, temos

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \Delta f(x, y) \leq \lim_{u \to v} \Delta f(u, v) = f'(v),$$

i.e., $f'(x) \leq f'(v)$ para todo o $x \leq v$ em I. □

Deste teorema obtém-se, como corolário, um critério bem conhecido para a convexidade de funções:

Se f for duas vezes diferenciável, f é convexa se, e somente se, $f'' \geq 0$.

DESIGUALDADE DE KARAMATA

Jovan Karamata (1902-1967) foi um matemático sérvio que trabalhou em Análise. No centenário do seu nascimento, também ele foi homenageado num selo de correios, como se pode ver na figura abaixo.

Para enunciarmos o teorema de Karamata, comecemos por fixar alguma terminologia. Dadas duas sequências decrescentes de números reais, $a_1, \ldots, a_n$ e $b_1, \ldots, b_n$, diremos que a primeira majora a segunda se

$$\begin{aligned} &a_1 \geq b_1\,, \\ &a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2\,, \\ &\vdots \\ &a_1 + \cdots + a_{n-1} \geq b_1 + \cdots + b_{n-1} \text{ e} \\ &a_1 + \cdots + a_n = b_1 + \cdots + b_n. \end{aligned}$$

Tem-se então o teorema de Karamata:

Sejam $a_1, \ldots, a_n$ e $b_1, \ldots, b_n$ duas sequências decrescentes de números reais pertencentes a um intervalo I. Se a primeira sequência majorar a segunda e $f : I \to \mathbb{R}$ for uma função convexa, então

$$\sum_{j=1}^{n} f(a_j) \geq \sum_{j=1}^{n} f(b_j)\,. \tag{6}$$

Em boa verdade, a desigualdade de Karamata já aparecia numa publicação de Hardy, Littlewood e Pólya do ano de 1929. Karamata só publica a sua demonstração em 1932. (*Cf.* [2, 4]). A demonstração elementar que aqui apresentamos é retirada de [3].

Demonstração. Se existirem j, k tais que $a_j = b_k$ então retirem-se estes termos das sequências, uma vez que eles se cancelam na desigualdade pretendida. Como pode ser verificado facilmente, as sequências resultantes também satisfazem a hipótese de majoração. Sem perda de generalidade, suponhamos então que $a_j \neq b_k$, para quaisquer j, k. Ponhamos

$$c_j = \Delta f(a_j, b_j) = \frac{f(a_j) - f(b_j)}{a_j - b_j}\,.$$

Notemos que, como f é convexa e $\Delta f(a_j, b_k)$ está definida para quaisquer j, k, se tem

$$c_j = \Delta f(a_j, b_j) \geq \Delta f(a_{j+1}, b_j) \geq \Delta f(a_{j+1}, b_{j+1}) = c_{j+1},$$

ou seja, a sequência $c_1, \ldots, c_n$ é decrescente. Fixemos a notação $A_0 = B_0 = 0$ e, para todo $k = 1, \ldots, n$,

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} a_i\,,\ B_k = \sum_{i=1}^{k} b_i\,.$$

Assim, da definição de $c_1, \ldots, c_n$ obtém-se

$$\sum_{j=1}^{n} f(a_j) - \sum_{j=1}^{n} f(b_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j\,(a_j - b_j)\,.$$

Como $a_j = A_j - A_{j-1}$ e $b_j = B_j - B_{j-1}$, para todo o $j = 1, \ldots, n$, o segundo membro é igual a:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} c_j(A_j - B_j) - \sum_{j=1}^{n} c_j(A_{j-1} - B_{j-1}) \\ &\qquad = c_n(A_n - B_n) + \sum_{j=1}^{n-1} (c_j - c_{j+1})(A_j - B_j)\,. \end{aligned}$$

Dado que $A_k \geq B_k$ para todo o $k = 1, \ldots, n-1$ e $A_n = B_n$, deduz-se (6). □

Observe-se que decorre diretamente da demonstração aqui apresentada que, se a função for convexa e crescente, na condição de majoração entre as sequências, a última igualdade pode ser omitida.

A desigualdade de Fuchs é uma generalização da desigualdade de Karamata que envolve a introdução de pesos em (6) e que pode demonstrar-se seguindo os passos da demonstração da desigualdade de Karamata.

Fixando reais positivos $\mu_1, \ldots, \mu_n$, a desigualdade de Fuchs diz que

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j\, f(a_j) \geq \sum_{j=1}^{n} \mu_j\, f(b_j)\,,$$

sempre que $a_1, \ldots, a_n$ e $b_1, \ldots, b_n$ forem duas sequências de números reais decrescentes tais que $\mu_1\, a_1, \ldots, \mu_n\, a_n$ majora $\mu_1\, b_1, \ldots, \mu_n\, b_n$.

Notemos que da desigualdade de Fuchs se pode obter a desigualdade de Jensen, (5), fazendo

$$b_1 = \cdots = b_n = \lambda_1\, a_1 + \cdots + \lambda_n\, a_n\,,$$

e $\lambda_j = \mu_j / (\mu_1 + \cdots + \mu_n)$ para $j = 1, \ldots, n$.

PROBLEMAS

Terminamos com uma proposta de alguns problemas que podem ser resolvidos usando as ideias aqui apresentadas. Os problemas 1, 3 e 4 foram retirados de [5] e o problema 5 aparece em [6].

1. Sejam $a_1, \ldots, a_n$ e $b_1, \ldots, b_n$ duas sequências decrescentes de números reais positivos tais que, para todo o $k = 1, \ldots, n$, se tem
$$a_1 \cdots a_k \geq b_1 \cdots b_k\,.$$
Mostre que $a_1 + \cdots + a_n \geq b_1 + \cdots + b_n$.

2. Sejam $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ tais que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. Dado $r \in \mathbb{R}^+$, define-se média ponderada de ordem r de $x_1, \ldots, x_n$ com pesos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ por

$$\mathrm{MP}_r = \Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, x_j^r \Big)^{1/r} .$$

Suponha que $0 < r \leq s$. Mostre que $\mathrm{MP}_r \leq \mathrm{MP}_s$.

3. Sejam $a_1, \ldots a_n$ números reais positivos. Mostre que
$$\frac{a_1^3}{a_2} + \frac{a_2^3}{a_3} + \cdots + \frac{a_n^3}{a_1} \geq a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 .$$

4. Com as hipóteses do problema anterior, mostre que
$$\prod_{j=1}^{n} (1 + a_j) \leq \Big(1 + \frac{a_1^2}{a_2}\Big) \cdots \Big(1 + \frac{a_{n-1}^2}{a_n}\Big) \Big(1 + \frac{a_n^2}{a_1}\Big) .$$

5. Sejam $f\colon [0, a_1] \to \mathbb{R}$ uma função convexa e $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ uma sequência decrescente de números em $[0, a_1]$. Mostre que
$$f\Big(\sum_{j=1}^{2n+1} (-1)^{j-1} a_j \Big) \leq \sum_{j=1}^{2n+1} (-1)^{j-1} f(a_j) .$$

REFERÊNCIAS

[1] A. Branquinho, "Uma desigualdade fundamental", *Gazeta de Matemática* 168 (2012), 8-10.

[2] G. H. Hardy, J. E. Littlewood e G. Pólya, *Some simple inequalities satisfied by convex functions*, Messenger of Math. 58 (1929), 145-152.

[3] Z. Kadelburg, D. Đukić, M. Lukić e I. Matić, *Inequalities of Karamata, Schur and Muirhead, and some applications*, The Teaching of Mathematics 2005, Vol. VIII, 1, pp. 31-45.

[4] J. Karamata, *Sur une Inegalité Rélative aux Fonctions Convexes*, Publ. Math. Univ. Belgrade 1 (1932), 145-148.

[5] I. Matić, *Classical Inequalities*, The IMO compendium group, Olympiad Training Materials, *www.imomath.com*, 2007.

[6] G. Szegő, *Über eine Verallgemeinerung des Dirichletschen Integrals*, Math. Zeitschrift 52 (1950), 676-685.