

A BELEZA MATEMÁTICA DAS CONCHAS MARINHAS

JORGE PICADO

RESUMO. Muitos aspectos do crescimento de animais e plantas, apesar de, pelas suas formas elaboradas, parecerem governados por regras muito complexas, podem ser descritos por leis matemáticas muito simples. Um exemplo claro disso são as conchas e os búzios marinhos, como aqui ilustramos: consegue-se, com um modelo muito simples, descrever e gerar facilmente qualquer um dos muitos tipos de conchas das classes dos Gastrópodes, Bivalves, Cefalópodes e Escafópodes que se podem encontrar classificados nas enciclopédias de conchas.

«A beleza é o brilho do ideal no reino do visível.»

— PLATÃO

«Há uma grande beleza nas pistas que a natureza nos oferece e todos nós a podemos reconhecer sem nenhum treino matemático. Também existe beleza nos enredos matemáticos que emanam dessas pistas e de onde se deduzem as regras e regularidades subjacentes, mas é um tipo de beleza diferente, mais aplicado a ideias do que a coisas. A matemática está para a natureza como Sherlock Holmes está para os indícios.»

— I. STEWART [6]

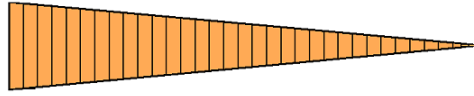
1. COMO CRESCEM AS CONCHAS

A ideia de que a matemática se encontra profundamente implicada nas formas naturais remonta aos gregos. Muitos aspectos do crescimento de animais e plantas, apesar de, pelas suas formas elaboradas, parecerem governados por regras muito complexas, podem ser descritos por leis matemáticas muito simples (cf., por exemplo, o livro clássico de D'Arcy Thompson [7] e o recente livro de Stephen Wolfram [8]).

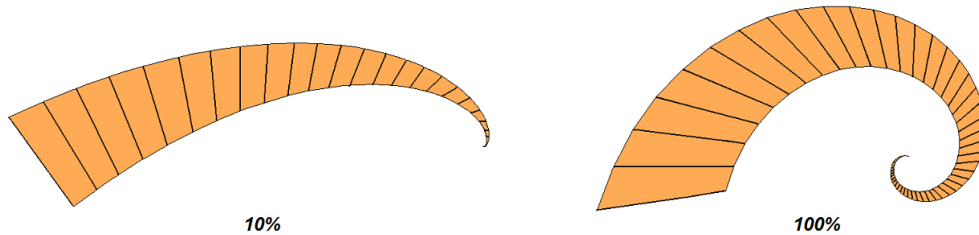
Um exemplo claro disso são as conchas e os búzios marinhos [4]. Porque é que tantas conchas formam espirais? Quando o bicho que vive numa concha cresce, é necessário que a concha onde vive também cresça, para o acomodar. O facto do animal que vive na extremidade aberta da concha segregar e depositar o material novo sempre nessa extremidade, e mais rapidamente num lado que no outro, faz com que a concha cresça em espiral. O ritmo de segregação de material novo em diferentes pontos da concha presume-se que seja determinado pela anatomia do animal. Surpreendentemente, mesmo variações muito pequenas nesses ritmos pode ter efeitos tremendos na forma final da concha, o que está na origem da existência de muitos tipos diferentes de conchas.

Uma versão bidimensional deste facto pode ser observado no crescimento dos cornos dos animais. Tal como as unhas e o cabelo, um corno cresce devido ao depósito de material

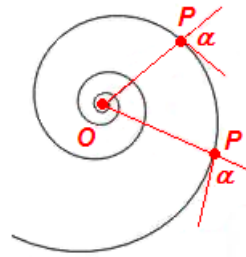
novo na sua base. De modo a ser uma estrutura perfeitamente rectilínea, a quantidade de material depositada deve ser exactamente a mesma de cada lado da base:



No entanto, se existir alguma diferença (indicada na figura seguinte, em termos percentuais), um dos lados do corno ficará mais comprido que o outro e, inevitavelmente, o corno terá que torcer para o lado onde é depositado menos material, seguindo uma espiral:



Essencialmente é uma versão tridimensional deste fenómeno que conduz às estruturas em espiral das conchas dos moluscos. Além disso, as conchas crescem mantendo sempre a mesma forma. Estas condicionantes juntas têm uma consequência matemática: quase todas as conchas seguem um modelo de crescimento baseado numa *espiral equiangular* (também chamada *espiral logarítmica*):

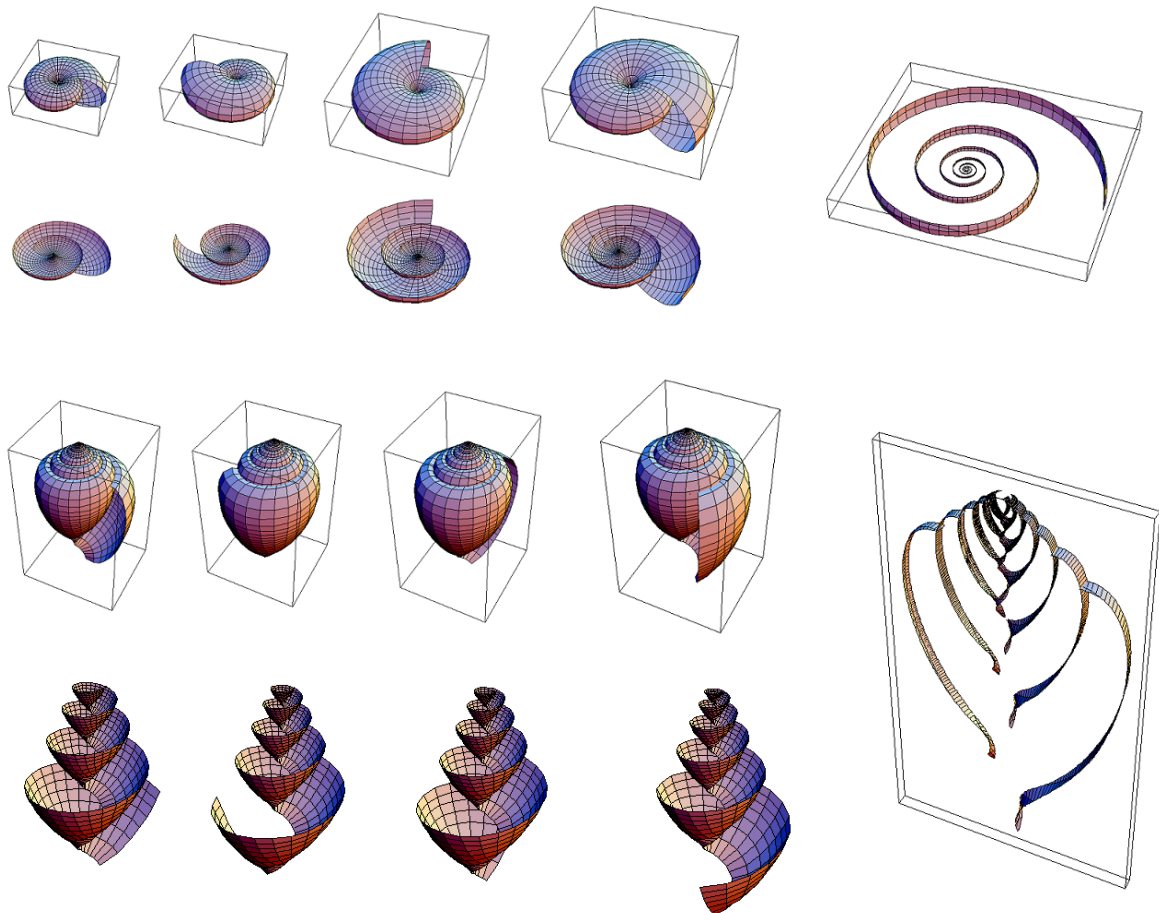


Como indicado na figura acima, dado um ponto O , a espiral equiangular é uma curva tal que a amplitude α do ângulo formado pela tangente, em qualquer dos seus pontos P , com a recta OP é constante. Jacob Bernoulli (1654-1705) chamou a esta curva a *Spira mirabilis* (*espiral maravilhosa*), cuja expressão analítica é dada, em termos das coordenadas polares r e θ , por $r(\theta) = Re^{\theta \cot \alpha}$ onde R é o raio associado a $\theta = 0$.

Se a amplitude α for 90° , a espiral equiangular é uma circunferência. É claro que o bicho não ficaria muito satisfeito com uma concha circular, porque esta não o deixaria crescer mais. O ângulo não sendo recto permite que a espiral cresça, o que corresponderá a um alargamento da concha. Este crescimento mantém sempre a forma da concha e chama-se *gnomónico*. Em geometria, o *gnómon* (palavra de raiz grega que significa “o que indica” ou “que dá a saber”) de uma figura dada é uma segunda figura que, acrescentada ou retirada

à primeira, gera uma terceira figura semelhante à original. Este padrão de crescimento é tão comum que é por muitos chamado de “lei da natureza”.

Em resumo, o molusco não alarga a sua concha de modo uniforme: adiciona somente material numa das extremidades da concha (a extremidade aberta ou “de crescimento”); e fá-lo de maneira a que a nova concha seja sempre um modelo exacto, à escala, da concha mais pequena. A figura seguinte mostra dois dos casos que podem acontecer. O primeiro exemplo é típico da concha dos náutilos e o segundo de um cone. Em cada caso o material novo da concha é progressivamente acrescentado na abertura da concha.



À direita, as secções horizontal (no caso do náutilo) e vertical (no caso do cone) mostram a respectiva espiral de crescimento.

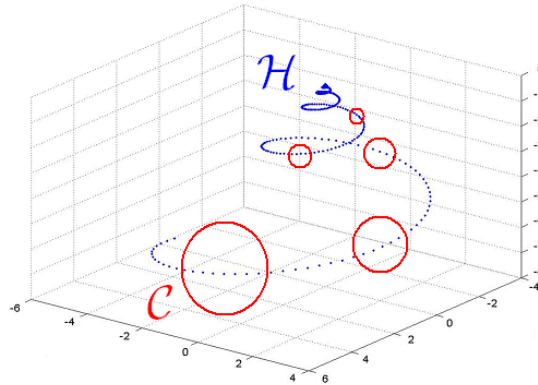
Como veremos, as conchas, com a sua forma auto-semelhante, podem ser representadas por superfícies tridimensionais, geradas por uma fórmula relativamente simples, com alguns parâmetros livres. Maravilhosamente, apesar da simplicidade dessas equações, é possível gerar uma grande variedade de tipos diferentes de conchas. Quais? Todos eles! (com muito poucas excepções: algumas espécies vivas e fósseis de *Vermicularia* e amonitas fósseis do género *Didymoceras*.) Isto mostra como muitas das formas que surgem na natureza são simples consequência da aplicação de geometria tridimensional a regras de crescimento básicas.

«(...) a matemática é muito parecida com a poesia... o que faz um bom poema — um excelente poema — é o ter muitos pensamentos expressos em poucas palavras. Neste sentido fórmulas como $e^{\pi i} + 1 = 0$ ou $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ são poemas.»

— LIPMAN BERS

2. O MODELO

A superfície da concha é uma superfície tridimensional que pode ser vista como o resultado do deslocamento de uma curva \mathcal{C} (a *curva geratriz*, que habitualmente é uma elipse) ao longo de uma espiral helicoidal \mathcal{H} (a *curva estrutural*) ([1], [3]); o tamanho da curva \mathcal{C} vai aumentando à medida que se desloca sobre \mathcal{H} :

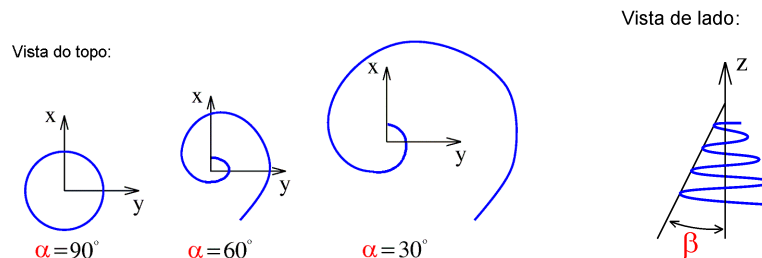


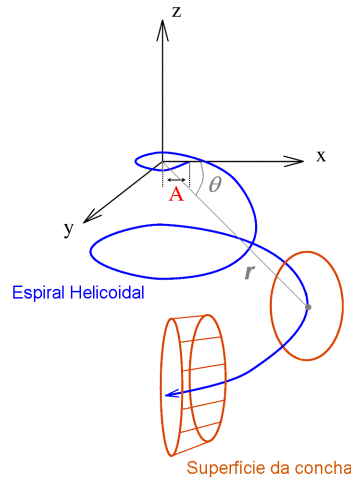
A forma de \mathcal{C} descreve o perfil das secções da concha e da abertura da concha enquanto \mathcal{H} determina a forma global da concha. A influência de \mathcal{C} na forma da concha é ilustrada mais adiante nos exemplos (veja também, para mais pormenores, [5]).

O primeiro passo na construção do modelo será definir um sistema cartesiano de coordenadas XYZ no espaço e considerar a helicóide na forma paramétrica, em termos das coordenadas polares (r, θ) . Vista de cima a espiral helicoidal parece uma espiral equian-gular, que tem equação

$$r = A \sin \beta e^{\theta \cot \alpha}$$

onde α denota o ângulo de abertura da espiral \mathcal{H} , β denota o *ângulo de alargamento* da espiral \mathcal{H} e A é o *comprimento da abertura* da espiral (isto é, a distância do seu ponto inicial ao seu centro):





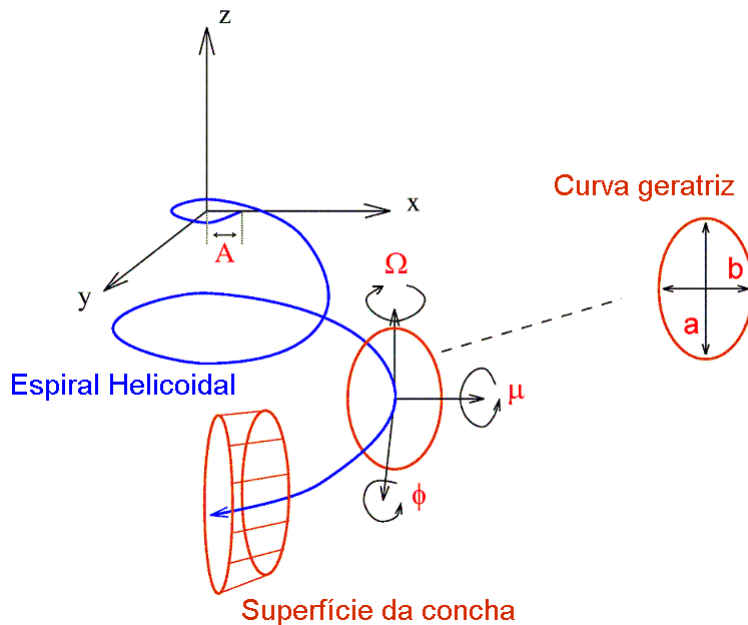
Portanto, os pontos (x, y, z) da espiral helicoidal satisfazem as equações

$$\begin{cases} x = r \cos \theta = A \sin \beta \cos \theta e^{\theta \cot \alpha} \\ y = r \sin \theta = A \sin \beta \sin \theta e^{\theta \cot \alpha} \\ z = -A \cos \beta e^{\theta \cot \alpha}. \end{cases}$$

A curva geratriz, usada para gerar a forma exterior da concha, é, na maior parte dos casos, uma elipse de parâmetros a (semi-eixo maior) e b (semi-eixo menor), ou seja, uma curva de equação

$$R = \left[\left(\frac{\cos s}{a} \right)^2 + \left(\frac{\sin s}{b} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.1}$$

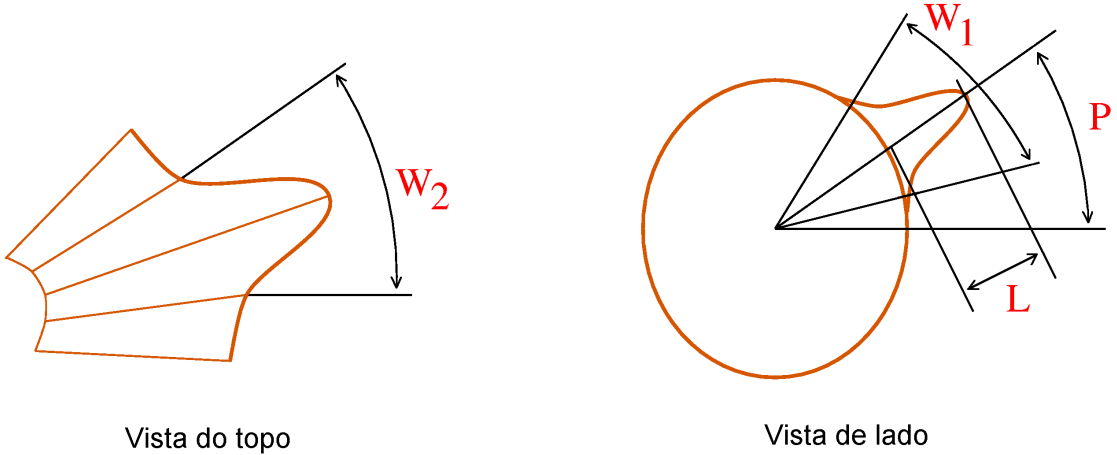
Permitimos ainda que esta curva possa rodar um ângulo μ em torno do seu eixo maior, um ângulo Ω em torno do eixo vertical e um ângulo ϕ em torno de um vector ortogonal ao plano da elipse, como a figura seguinte ilustra.



Juntando tudo, e entrando ainda com o sentido D do *enrolamento* (que pode ser positivo, 1, ou negativo, -1), obtêm-se então as equações paramétricas que permitem descrever a superfície da concha gerada por uma elipse \mathcal{C} , de equação R , a deslocar-se ao longo de uma espiral helicoidal \mathcal{H} (D. Fowler, H. Meinhardt e P. Prusinkiewicz [3], M. B. Cortie [1]):

$$\begin{aligned} x &= D[A \sin \beta \cos \theta + R \cos(s + \phi) \cos(\theta + \Omega) - R \sin \mu \sin(s + \phi) \sin(\theta + \Omega)] e^{\theta \cot \alpha} \\ y &= [-A \sin \beta \sin \theta - R \cos(s + \phi) \sin(\theta + \Omega) - R \sin \mu \sin(s + \phi) \cos(\theta + \Omega)] e^{\theta \cot \alpha} \\ z &= [-A \cos \beta + R \sin(s + \phi) \cos \mu] e^{\theta \cot \alpha}. \end{aligned}$$

Se quisermos acrescentar nódulos, espinhos e estrias à concha, bastará considerar parâmetros N (número de nódulos existentes ao longo de uma revolução completa de θ), W_1 (comprimento do nódulo ao longo da geratriz), W_2 (comprimento do nódulo ao longo da helicóide), L (altura do nódulo) e P (ângulo que indica a posição do nódulo na geratriz):



Bastará então substituir a equação (2.1) da elipse por

$$R = \left[\left(\frac{\cos s}{a} \right)^2 + \left(\frac{\sin s}{b} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} + L e^{[-(\frac{2(s-P)}{W_1})^2 - (\frac{2l(\theta)}{W_2})^2]},$$

onde

$$l(\theta) = \frac{2\pi}{N} \left[\frac{N\theta}{2\pi} - \text{int} \left(\frac{N\theta}{2\pi} \right) \right].$$

No total, as equações da superfície da concha dependem de 14 parâmetros:

$$D, A, \alpha, \beta, \mu, \Omega, \phi, a, b, L, P, W_1, W_2, N.$$

«A Matemática possui não só verdade, mas também beleza suprema — uma beleza fria e austera, como a da escultura, sem apelar a qualquer parte mais fraca da nossa natureza... sublimemente pura, e capaz da perfeição sem compromissos que só a grande arte pode atingir.»

— BERTRAND RUSSELL

3. EXEMPLOS

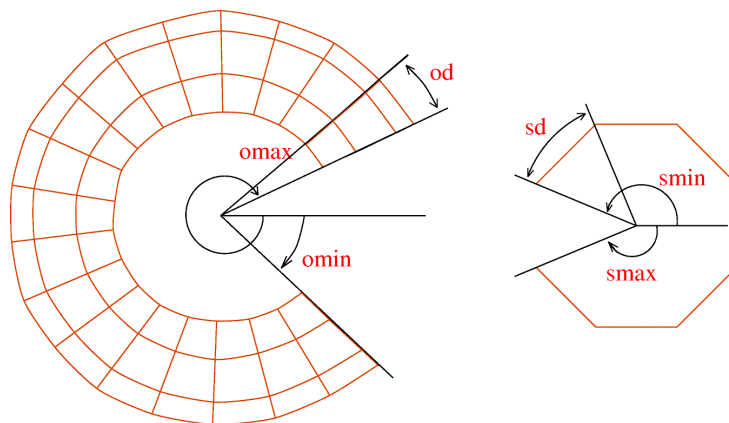
A escrita das equações no programa Mathematica pode ser feita do seguinte modo:

```

l[n_][theta_]=(2Pi/n)((n theta/2Pi)-IntegerPart[n theta/2Pi]);
k[a_,b_,ll_,p_,w1_,w2_,n_][s_,theta_]=If[w1=0||w2=0||n=0,0,
  ll Exp[-(2(s-p)/w1)^2-(2l[n][theta]/w2)^2]];
h[a_,b_,ll_,p_,w1_,w2_,n_][s_,theta_]=(1/(Sqrt[(Cos[s]/a)^2+(Sin[s]/b)^2]))
  + k[a_,b_,ll_,p_,w1_,w2_,n_][s_,theta_];
x[d_,aa_,beta_,phi_,omega_,mu_,alpha_,a_,b_,ll_,p_,w1_,w2_,n_][theta_,s_]=
  d(aa Sin[beta]Cos[theta]+h[a,b,ll,p,w1,w2,n][s,theta]
    (Cos[s+phi]Cos[theta+omega]-Sin[mu]Sin[s+phi]Sin[theta+omega]))
    Exp[theta Cot[alpha]];
y[aa_,beta_,phi_,omega_,mu_,alpha_,a_,b_,ll_,p_,w1_,w2_,n_][theta_,s_]=
  (-aa Sin[beta] Sin[theta]-h[a,b,ll,p,w1,w2,n][s,theta]
    (Cos[s+phi]Sin[theta+omega]+Sin[mu]Sin[s+phi]Cos[theta+omega]))
    Exp[theta Cot[alpha]];
z[aa_,beta_,phi_,mu_,alpha_,a_,b_,ll_,p_,w1_,w2_,n_][theta_,s_]=
  (-aa Cos[beta]+h[a,b,ll,p,w1,w2,n][s,theta]Sin[s+phi]Cos[mu])
    Exp[theta Cot[alpha]];

```

Escolhendo valores adequados para os diversos parâmetros e variando θ desde $omin$ até $omax$ e s de $smin$ a $smax$



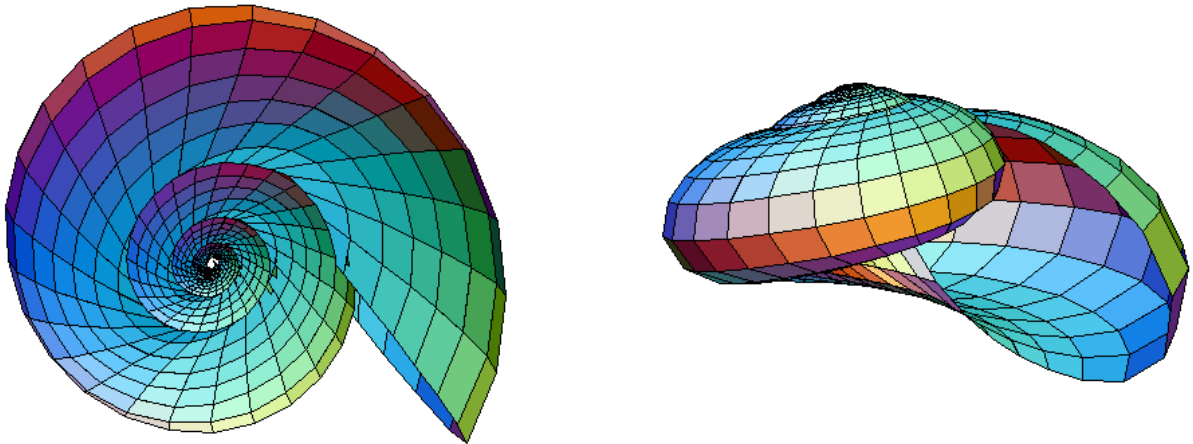
Vista do topo

Vista de lado

podemos traçar a superfície de qualquer tipo de concha conhecido.

Por exemplo, a Náutica de orelha (cf. [2], p. 78), da classe dos Gastrópodes, pode ser gerada com os parâmetros

$D = 1$, $A = 25$, $\alpha = 83^\circ$, $\beta = 42^\circ$, $\mu = 10^\circ$, $\Omega = 30^\circ$, $\phi = 70^\circ$, $a = 12$, $b = 20$, $L = 0$,
 $P = 0$, $W_1 = 1$, $W_2 = 1$ e $N = 1$:

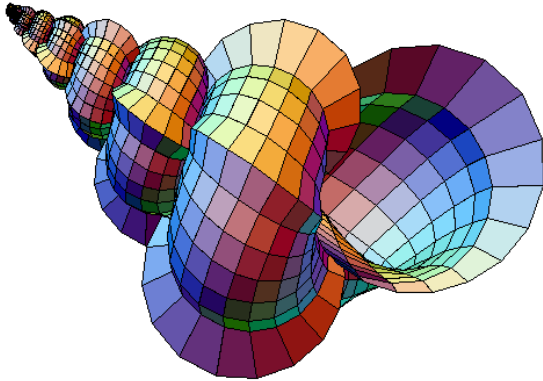


```
With[{d=1,aa=25,beta=42Degree,phi=70Degree,omega=30Degree,mu=10Degree,
      alpha=83Degree,a=12,b=20,ll=0,p=0,w1=0,w2=0,n=0},
ParametricPlot3D[{x[d,aa,beta,phi,omega,mu,alpha,a,b,ll,p,w1,w2,n][theta,s],
                  y[aa,beta,phi,omega,mu,alpha,a,b,ll,p,w1,w2,n][theta,s],
                  z[aa,beta,phi,mu,alpha,a,b,ll,p,w1,w2,n][theta,s]},
                 {theta,-4Pi,4Pi},{s,-270Degree,90Degree},
                 Boxed->False,Axes->False,PlotPoints->{100,20},
                 PlotRange->All,ViewPoint->{-1,-3,0.5}]]
```

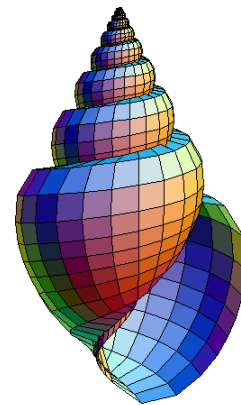
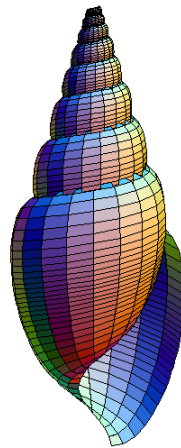
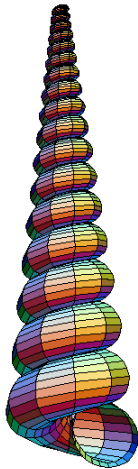
Terminamos com mais alguns exemplos de conchas que se encontram classificados em [2] e que se podem modelar deste modo (estes, e outros exemplos, podem ser manipulados interactivamente, com mais pormenor, em [5]).

O exemplo mais surpreendente é o dos bivalves, com os seus umbos (protuberâncias do topo) maravilhosamente traçados com toda a perfeição!

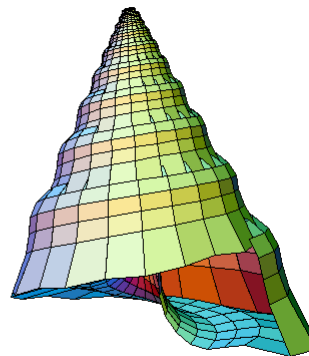
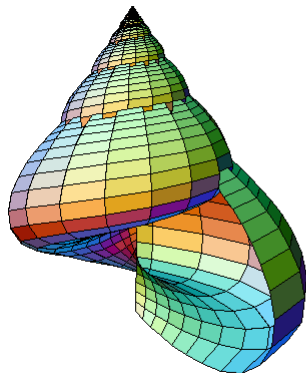
Escalária Preciosa ($D = 1, A = 90, \alpha = 86^\circ, \beta = 10^\circ, \mu = 5^\circ, \Omega = 1^\circ, \phi = -45^\circ, a = 20, b = 20, L = 14, P = 40, W_1 = 180, W_2 = 0.4, N = 180$):



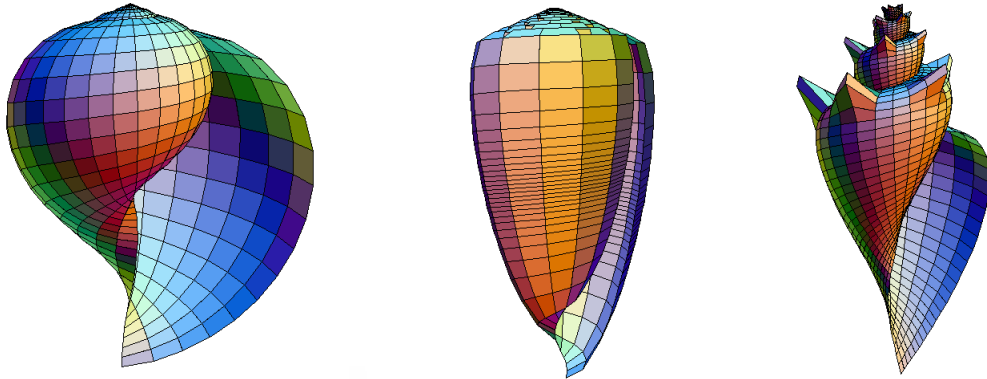
Turritela, ancilla e búzio:



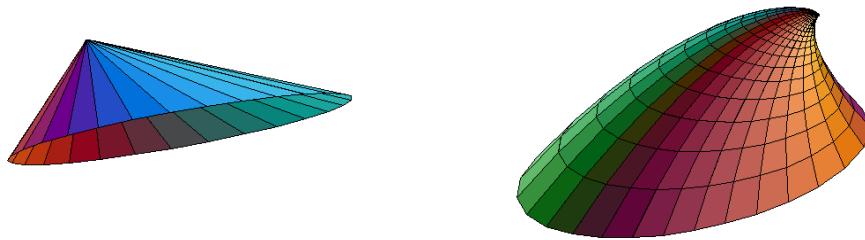
Dois troques (o troque maura tigre e o troque comercial):



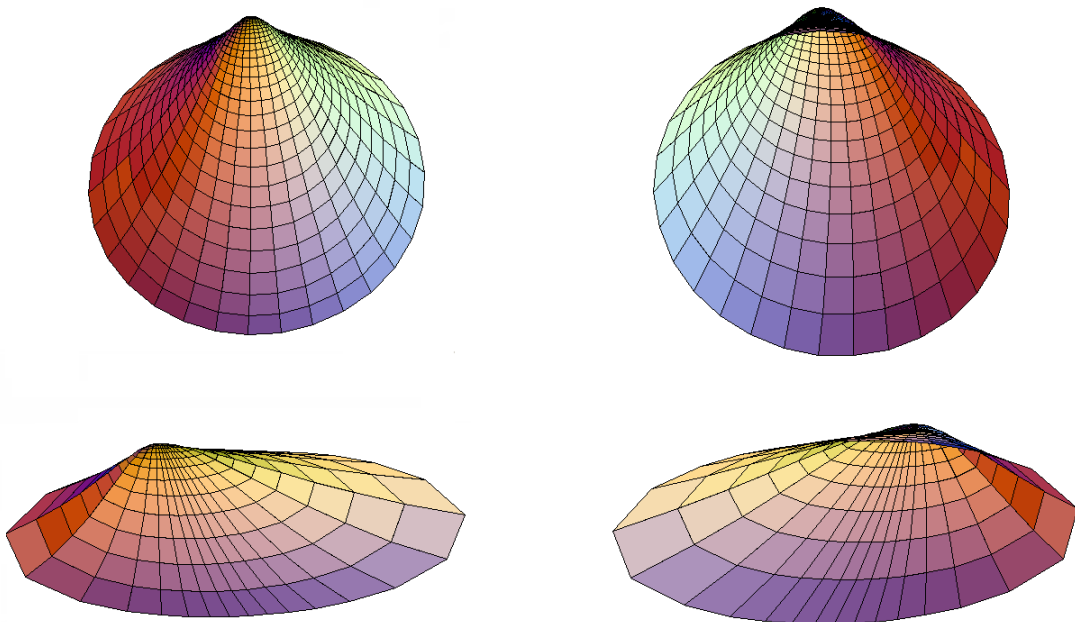
Tonel, oliva e concha cavalo:



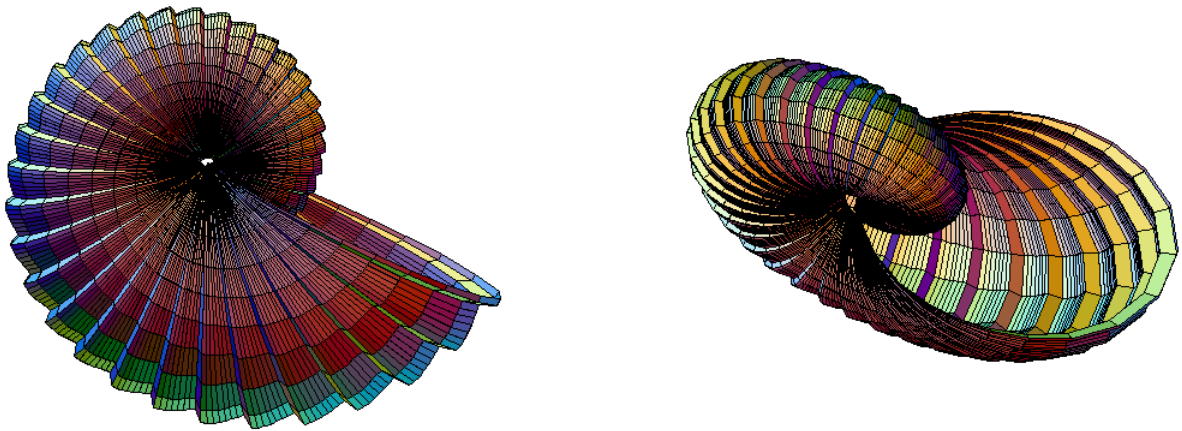
Duas lapas (a lapa comum e a lapa raiada de azul):



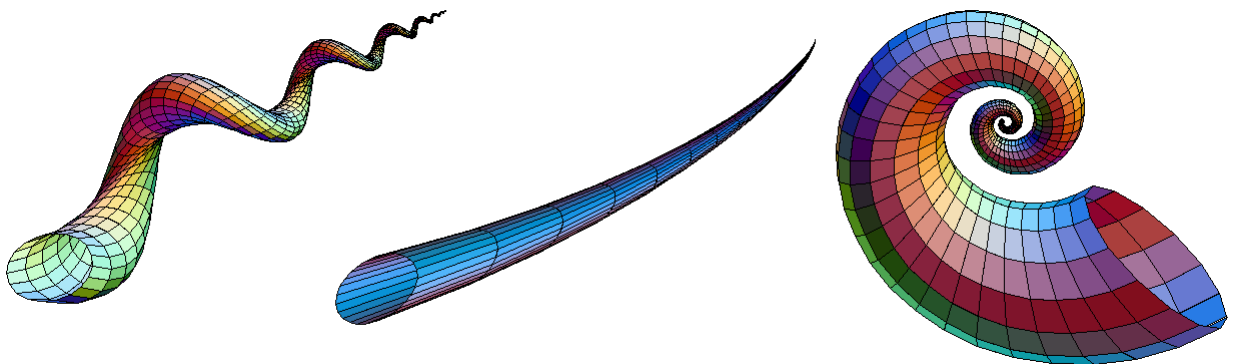
Dois bivalves (a glicimeris-europeia e a concha lyonsia):



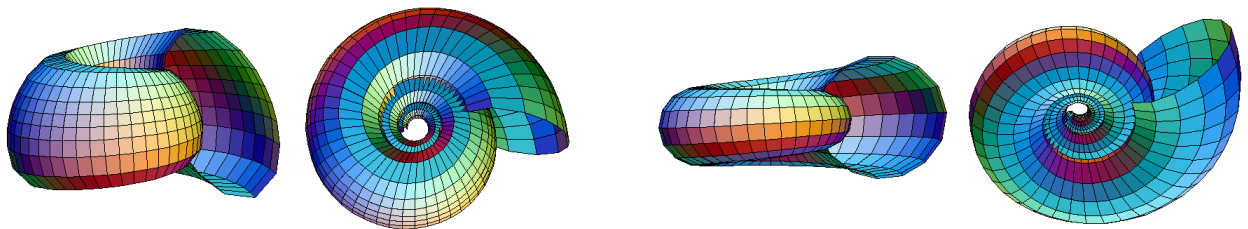
Argonauta (Cefalópode):



Serpentina, dente de elefante (Escafópode) e espirula:



Planorbis e amonita (fóssil):



«O cientista não estuda a Natureza porque isso é útil; estuda-a porque ele se delicia nela, e ele delicia-se nela porque é bela. Se a Natureza não fosse bela, não valeria a pena ser conhecida, e se a Natureza não valesse a pena ser conhecida, a vida não valeria a pena ser vivida.»

— HENRI POINCARÉ

REFERÊNCIAS

- [1] M. B. Cortie, *Digital seashells*, Comput. & Graphics 17 (1993) 79-84.
- [2] S. P. Dance, *Conchas*, Bertrand Editora, 1996.
- [3] D. Fowler, H. Meinhardt e P. Prusinkiewicz, *Modeling seashells*, Computer Graphics 26 (1992) 379-387.
- [4] H. Meinhardt, *The Algorithmic Beauty of Sea Shells*, Springer Verlag, 1998.
- [5] J. Picado, *Conchas marinhas: a simplicidade e beleza da sua descrição matemática*, www.mat.uc.pt/~picado/conchas.
- [6] I. Stewart, *Os Números da Natureza*, Temas e Debates, 2003.
- [7] D'A. Thompson, *On Growth and Form*, Cambridge University Press, 1961.
- [8] S. Wolfram, *A New Kind of Science*, Wolfram Research, Inc., 2004.

CENTRO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA, 3001-454 COIMBRA

E-mail address: picado@mat.uc.pt

URL: www.mat.uc.pt/~picado