Canguru Matemático sem Fronteiras 2024

Categoria: Estudante | Duração: 1h 30min

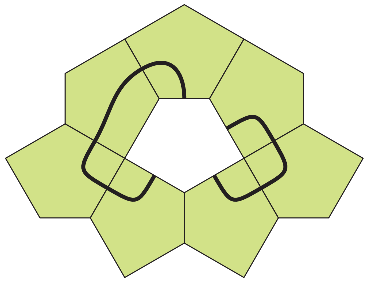
Destinatários: alunos do 12.º ano de escolaridade

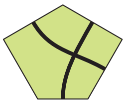
Nome: ______________________________ Turma: ____________

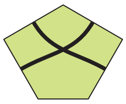
Não podes usar calculadora. Em cada questão deves assinalar a resposta correta. As questões estão agrupadas em três níveis: Problemas de 3 pontos, Problemas de 4 pontos e Problemas de 5 pontos. Inicialmente tens 30 pontos. Por cada resposta correta ganhas tantos pontos quantos os do nível da questão, no entanto, por cada resposta errada és penalizado em 1/4 dos pontos correspondentes a essa questão. Não és penalizado se não responderes a uma questão, mas infelizmente também não adicionas pontos.

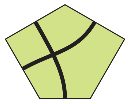
Problemas de 3 pontos

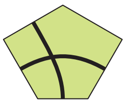
1. No mosaico da figura ao lado todos os azulejos têm a mesma forma pentagonal. Qual dos azulejos seguintes pode ser colocado no espaço vazio central do mosaico, de modo a que o mosaico contenha uma curva fechada que se interseta a si própria?

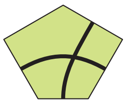


(A) 

(B) 

(C) 

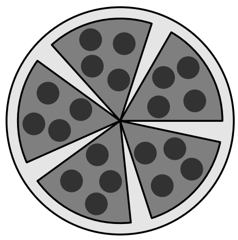
(D) 

(E) 

2. Qual dos números inteiros seguintes é inferior em duas unidades a um múltiplo de 10, superior em duas unidades a um quadrado perfeito e o dobro de um número primo?

(A) 78 **(B)** 58 **(C)** 38 **(D)** 18 **(E)** 6

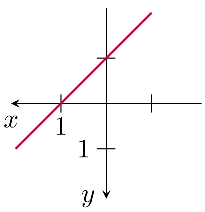
3. A Maria cortou uma piza em seis fatias iguais. Após comer uma das fatias, organizou as fatias restantes com intervalos iguais entre elas, como se mostra na figura ao lado. Qual é a amplitude do ângulo de cada um dos intervalos entre duas fatias vizinhas?



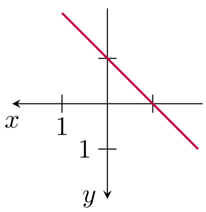
(A) $5°$ **(B)** $8°$ **(C)** $9°$

(D) $10°$ **(E)** $12°$

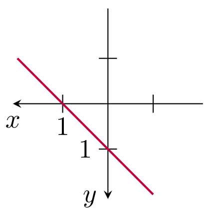
4. O Tomás tem o hábito invulgar de desenhar o referencial Oxy do plano com o semieixo positivo das abcissas apontando para a esquerda e o semieixo positivo das ordenadas apontando para baixo. Qual das opções seguintes é uma representação da reta de equação $y = x + 1$ num sistema de eixos coordenados desenhado desse modo?



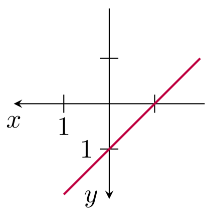
(A)



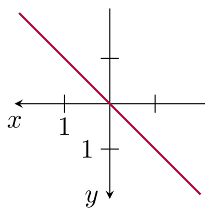
(B)



(C)



(D)



(E)

© Canguru Matemático. Todos os direitos reservados.

Este material pode ser reproduzido apenas com autorização do Canguru Matemático®

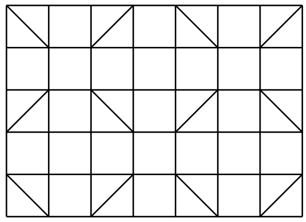
5. Um dado com as faces numeradas de 1 a 6 foi alterado de tal modo que a probabilidade de sair cada um dos números 2, 3, 4 ou 5 num lançamento é $\frac{1}{6}$, enquanto que a probabilidade de sair 6 é o dobro da probabilidade de sair 1. Qual é a probabilidade de num lançamento deste dado sair 6?

(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{6}$ **(C)** $\frac{7}{36}$ **(D)** $\frac{2}{9}$ **(E)** $\frac{5}{18}$

6. Qual é o valor da expressão $16^{15} + 16^{15} + 16^{15} + 16^{15}$?

(A) 16^{19} **(B)** 4^{31} **(C)** 4^{60} **(D)** 16^{60} **(E)** 4^{122}

7. No mínimo, quantas cores são precisas para pintar os triângulos e quadrados da figura ao lado, de tal modo que quaisquer figuras vizinhas, incluindo aquelas que partilham apenas um vértice, tenham cores distintas?



(A) 3 **(B)** 4 **(C)** 5 **(D)** 6 **(E)** 7

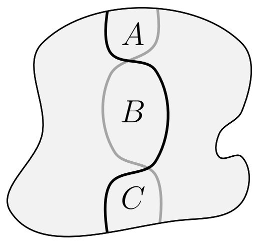
8. Numa mesa estão seis copos. Num jogo, em cada movimento devem-se virar exatamente quatro desses copos do seguinte modo: os que têm a abertura para cima ficam com a abertura para baixo e os que têm a abertura para baixo ficam com a abertura para cima. No início do jogo os seis copos têm a abertura virada para cima. Qual é o número mínimo de movimentos que é preciso fazer para que todos os copos fiquem com a abertura virada para baixo?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 6

9. A Lígia multiplicou o número 1 por um dos números: 6 ou 10. Em seguida multiplicou o resultado por 6 ou por 10 e repetiu este procedimento muitas vezes, construindo uma sequência de números. Dos seguintes, qual não pode ser um dos números dessa sequência?

(A) $2^{100} \times 3^{20} \times 5^{80}$ **(B)** $2^{90} \times 3^{20} \times 5^{80}$ **(C)** $2^{90} \times 3^{20} \times 5^{70}$
(D) $2^{110} \times 3^{80} \times 5^{30}$ **(E)** $2^{50} \times 5^{50}$

10. Na figura ao lado está representado o mapa de um parque. Nesse mapa estão marcados dois caminhos, um a preto e o outro a cinzento. Cada um destes caminhos divide o parque em duas regiões com áreas iguais. Designando por A, B e C as áreas das regiões do parque que no mapa estão representadas por estas letras, qual das afirmações seguintes é verdadeira?



(A) $A = C$ **(B)** $B = A + C$ **(C)** $B = \frac{1}{2}(A + C)$
(D) $B = \frac{2}{3}(A + C)$ **(E)** $B = \frac{3}{5}(A + C)$

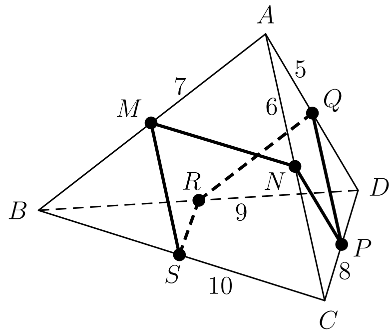
Problemas de 4 pontos

11. Das afirmações seguintes, feitas sobre um número inteiro positivo n, exatamente uma é verdadeira. Qual é essa afirmação?

(A) n é divisível por 3 **(B)** n é divisível por 6 **(C)** n é ímpar
(D) $n = 2$ **(E)** n é um número primo

© Canguru Matemático. Todos os direitos reservados.
Este material pode ser reproduzido apenas com autorização do Canguru Matemático®

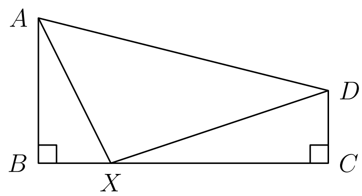
12. Uma pirâmide triangular, $[ABCD]$, tem arestas de comprimentos $\overline{AD} = 5$, $\overline{AC} = 6$, $\overline{AB} = 7$, $\overline{CD} = 8$, $\overline{BD} = 9$ e $\overline{BC} = 10$, sendo M, N, P, Q, R e S os pontos médios das arestas, como se mostra na figura seguinte.



Qual é o comprimento da linha poligonal fechada $MNPQRSM$?

(**A**) 19 (**B**) 20 (**C**) 21 (**D**) 22 (**E**) 23

13. No quadrilátero $[ABCD]$, representado na figura ao lado, os ângulos internos em B e C são retos, $\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = 8$, $\overline{CD} = 2$ e X é um ponto do lado $[BC]$. Qual é o valor mínimo que $\overline{AX} + \overline{DX}$ pode ter?

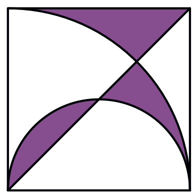


(**A**) $9\sqrt{2}$ (**B**) 12
(**C**) 13 (**D**) 10
(**E**) Nenhum dos anteriores

14. O João tem ao seu dispor 60 cubos, com arestas medindo 1 cm. Metade destes cubos têm todas as faces pintadas de branco e os restantes têm todas as faces pintadas de preto. Com 27 destes cubos o João pretende construir um cubo com arestas medindo 3 cm e que tenha exatamente metade da sua superfície pintada de branco. No mínimo, quantos dos cubos mais pequenos e com todas as faces pintadas de preto tem o João de utilizar?

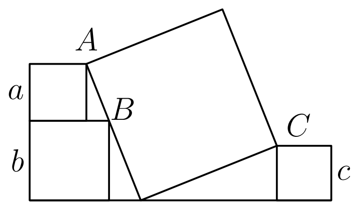
(**A**) 14 (**B**) 13 (**C**) 12 (**D**) 11
(**E**) Nenhuma das opções anteriores

15. O quadrado da figura ao lado tem 6 cm de lado e no seu interior foram marcados uma diagonal, uma semicircunferência e um quarto de circunferência. Qual é a área, em cm^2, da região sombreada?



(**A**) 9 (**B**) 3π (**C**) $6\pi - 9$ (**D**) $10\pi/3$ (**E**) 12

16. Na figura ao lado estão quatro quadrados. Os três quadrados mais pequenos têm lados de comprimentos a, b e c, como representado, e os vértices A e C de dois desses quadrados são vértices diagonalmente opostos do quadrado maior. O ponto B é um vértice do quadrado com comprimento de lado b e está num dos lados do quadrado maior. Qual das expressões seguintes representa o comprimento dos lados do quadrado maior?



(**A**) $\frac{1}{2}(a+b+c)$ (**B**) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ (**C**) $\sqrt{(a+b)^2+c^2}$
(**D**) $\sqrt{(b-a)^2+c^2}$ (**E**) $\sqrt{a^2+ab+b^2+c^2}$

© Canguru Matemático. Todos os direitos reservados.
Este material pode ser reproduzido apenas com autorização do Canguru Matemático®

17. Dois números positivos, p e q, são tais que $p < q$. Das expressões seguintes, qual representa o maior número?

(**A**) $\frac{p+3q}{4}$ (**B**) $\frac{p+2q}{3}$ (**C**) $\frac{p+q}{2}$ (**D**) $\frac{2p+q}{3}$ (**E**) $\frac{3p+q}{4}$

18. Quantos são os números naturais com três algarismos e que contêm, pelo menos, um dos algarismos 1, 2 ou 3?

(**A**) 27 (**B**) 147 (**C**) 441 (**D**) 557 (**E**) 606

19. Seja $N = \overline{pqrs}$ um número inteiro positivo de 4 algarismos (esta notação significa que p é o algarismo dos milhares, q é o algarismo das centenas, r é o algarismo das dezenas e s é o algarismo das unidades). Sabe-se que a média dos números de dois algarismos, $\overline{pq}$ e $\overline{rs}$, é igual ao número que se obtém de N colocando uma vírgula entre os algarismos q e r. Qual é a soma dos algarismos de N?

(**A**) 14 (**B**) 18 (**C**) 21 (**D**) 25 (**E**) 27

20. Duas velas com a mesma altura começam a arder ao mesmo tempo. Uma das velas demorará 4 horas a arder por completo enquanto que a outra demorará 5 horas, cada uma delas a uma taxa constante. Ao fim de quantas horas será a altura de uma das velas o triplo da altura da outra?

(**A**) $\frac{40}{11}$ (**B**) $\frac{45}{12}$ (**C**) $\frac{63}{20}$ (**D**) 3 (**E**) $\frac{47}{14}$

Problemas de 5 pontos

21. O André tem seis cartões, cada um deles com um número escrito em cada uma das suas faces. Os pares de números nesses cartões são $(5, 12), (3, 11), (0, 16), (7, 8), (4, 14)$ e $(9, 10)$.
Os seis cartões devem ser colocado nos espaços quadrangulares da figura, por qualquer ordem.

$$\square + \square + \square - \square - \square - \square = ?$$

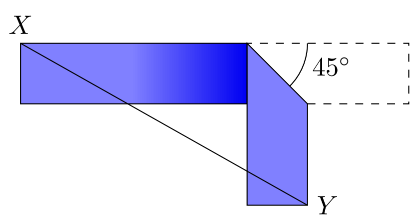
Qual é o menor valor que se pode obter, efetuando as operações indicadas com os números visíveis?

(**A**) -23 (**B**) -24 (**C**) -25 (**D**) -26 (**E**) -27

22. Sejam a, b e c números reais diferentes de zero e distintos dois a dois. Sabendo que as equações $ax^2+bx+c = 0$ e $bx^2 + ax + c = 0$ têm uma solução comum, qual das afirmações seguintes é forçosamente verdadeira?

(**A**) A solução comum tem de ser 0
(**B**) A equação $ax^2 + bx + c = 0$ tem exatamente uma solução real
(**C**) $a > 0$
(**D**) $b < 0$
(**E**) $a + b + c = 0$

23. Uma tira de papel, com 12 cm de comprimento e 2 cm de largura, é dobrada de modo a que as duas partes da tira façam um ângulo reto, como se mostra na figura ao lado. Qual é o menor valor possível, em centímetros, de $\overline{XY}$?



(**A**) $6\sqrt{2}$ (**B**) $7\sqrt{2}$ (**C**) 10 (**D**) 8 (**E**) $6+\sqrt{2}$

© Canguru Matemático. Todos os direitos reservados.
Este material pode ser reproduzido apenas com autorização do Canguru Matemático®

24. A Ana tem vários dados equilibrados, cada um com 12 faces, numeradas de 1 a 12. Lançando todos estes dados ao mesmo tempo, a probabilidade de que exatamente um dos dados tenha o número 12 na face virada para cima é igual à probabilidade de que nenhum dos dados tenha o número 12 na face virada para cima. Quantos dados tem a Ana?

(**A**) 8 (**B**) 9 (**C**) 10 (**D**) 11 (**E**) 12

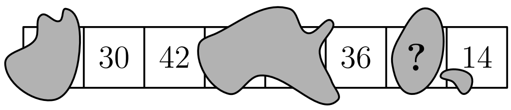
25. Um polinómio p é tal que $p(x+1) = x^2 - x + 2p(6)$, para todo o número real x. Qual é a soma dos coeficientes do polinómio p?

(**A**) -40 (**B**) -6 (**C**) 12 (**D**) 40
(**E**) Nenhum dos números anteriores

26. Os números x, y e z verificam $2^x = 3$, $2^y = 7$ e $6^z = 7$. Qual das afirmações seguintes é forçosamente verdadeira?

(**A**) $z = \dfrac{y}{1+x}$ (**B**) $z = \dfrac{x}{y} + 1$ (**C**) $z = \dfrac{y}{x} - 1$ (**D**) $z = \dfrac{x}{y-1}$ (**E**) $z = y - \dfrac{1}{x}$

27. Uma tira de papel está dividida em 8 quadrados. Inicialmente todos os quadrados têm o número 0. A Filipa e o José estão a jogar um jogo que consiste em, à vez, cada jogador escolher quatro quadrados consecutivos da tira de papel e adicionar 1 a cada um dos números nesses quadrados. No decorrer do jogo caiu tinta sobre alguns dos quadrados, como se mostra na figura seguinte. Que número está escrito no quadrado assinalado com o ponto de interrogação?



(**A**) 24 (**B**) 30 (**C**) 36 (**D**) 48
(**E**) Nenhum dos números anteriores

28. Uma função $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é tal que $f(20-x) = f(22+x)$ para todo o número real x. Sabe-se ainda que a equação $f(x) = 0$ tem exatamente duas soluções. Qual é a soma dessas soluções?

(**A**) -1 (**B**) 20 (**C**) 21 (**D**) 22
(**E**) Nenhum dos números anteriores

29. Numa circunferência estão marcados doze pontos igualmente espaçados. Quantos triângulos, contendo um ângulo interno com 45° de amplitude, podem ser construídos tendo como vértices três desses doze pontos?

(**A**) 48 (**B**) 60 (**C**) 72 (**D**) 84 (**E**) 96

30. Um número de quatro algarismos, $\overline{abcd}$, é tal que $\overline{abcd} = a^a + b^b + c^c + d^d$. Qual é valor de a?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

© Canguru Matemático. Todos os direitos reservados.

Este material pode ser reproduzido apenas com autorização do Canguru Matemático®