

Canguru Matemático sem Fronteiras 2024

Categoria: Júnior

Duração: 1h 30min

Destinatários: alunos dos 10.º e 11.º anos de escolaridade

Nome: _____ Turma: _____

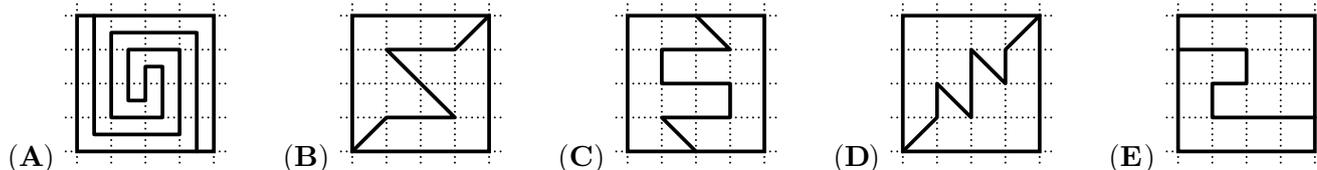
Não podes usar calculadora. Em cada questão deves assinalar a resposta correta. As questões estão agrupadas em três níveis: Problemas de 3 pontos, Problemas de 4 pontos e Problemas de 5 pontos. Inicialmente tens 30 pontos. Por cada resposta correta ganhas tantos pontos quantos os do nível da questão, no entanto, por cada resposta errada és penalizado em 1/4 dos pontos correspondentes a essa questão. Não és penalizado se não responderes a uma questão, mas infelizmente também não adicionas pontos.

Problemas de 3 pontos

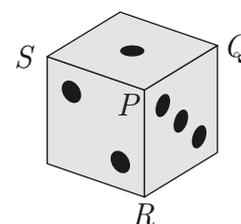
1. Qual é o valor de $\frac{2 \times 0,24}{20 \times 2,4}$?

- (A) 0,01 (B) 0,1 (C) 1 (D) 10 (E) 100

2. Em cada opção A, B, C, D e E temos a figura de um quadrado e uma linha poligonal que divide o quadrado em duas partes. Em qual das opções seguintes as duas partes não têm a mesma forma geométrica?



3. Num dado regular, como o ilustrado na figura ao lado, a soma dos números de pontos em faces opostas é sempre 7. No referido dado, o vértice P é a interseção das faces com 1, 2 e 3 pontos. Chamamos soma de pontos num vértice à soma dos pontos das faces que contêm esse vértice. Por exemplo, a soma dos pontos no vértice P é $1 + 2 + 3 = 6$. Qual é a maior das somas de pontos nos vértices Q , R e S ?



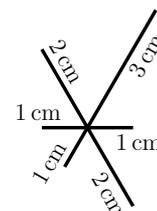
- (A) 7 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 15

4. Um jogo de saltos numa sequência de quadrados tem as seguintes regras: cada jogador salta para o próximo quadrado em sequência alternando entre pé esquerdo, pés juntos, pé direito, pés juntos, pé esquerdo, pés juntos, e assim sucessivamente, como ilustrado na figura ao lado. A Maia participou neste jogo saltando para exatamente 48 quadrados, tendo começado com o pé esquerdo. Durante o jogo, por quantas vezes é que o pé esquerdo da Maia tocou no chão?



- (A) 12 (B) 24 (C) 36 (D) 40 (E) 48

5. O Guilherme quer desenhar a figura ao lado num papel sem levantar o lápis do papel. A figura é constituída por segmentos de reta que se interseitam num ponto e têm os comprimentos indicados na figura. Ele pode começar a desenhar a figura em qualquer ponto. Qual é a menor distância que ele pode desenhar para completar a figura?

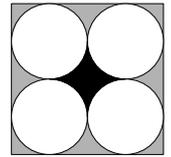


- (A) 14 cm (B) 15 cm (C) 16 cm
(D) 17 cm (E) 18 cm



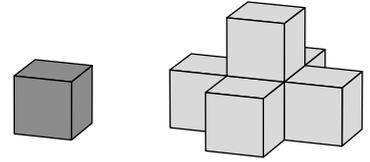


6. A figura ao lado ilustra um quadrado contendo quatro círculos de áreas iguais. Cada um dos círculos toca em dois lados do quadrado e toca em dois outros círculos. Qual é a razão entre a área da região a preto e a área da região a cinzento?



- (A) 1 : 4 (B) 1 : 3 (C) 2 : 3 (D) 3 : 4 (E) π : 1

7. O João constrói uma sequência de estruturas com cubos geometricamente iguais e começa a sequência com um cubo apenas sobre uma mesa. Ele constrói a segunda estrutura adicionando cinco cubos que cobrem as faces do cubo inicial, menos a que está encostada à mesa, como ilustrado na figura ao lado. Qual é o menor número de cubos que o João precisa de adicionar à segunda estrutura de forma que todas as faces da segunda estrutura, menos as que estão encostadas à mesa, sejam tapadas?

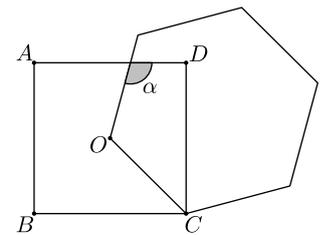


- (A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 13 (E) 19

8. Um palíndromo com três algarismos é um número da forma aba onde a e b são algarismos iguais ou distintos. Qual é a soma dos algarismos do maior palíndromo de três algarismos que também é um múltiplo de 6?

- (A) 16 (B) 18 (C) 20 (D) 21 (E) 24

9. O Martim desenha um quadrado com vértices A, B, C, D e um hexágono regular com lado $[OC]$, onde O é o centro do quadrado, como ilustrado na figura ao lado. Qual é a medida do ângulo α ?



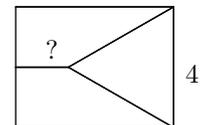
- (A) 105° (B) 110° (C) 115° (D) 120° (E) 125°

10. A Andreia delimitou um campo rectangular com 40 m de cerca. Os comprimentos dos lados do retângulo são todos números primos. Qual é a maior área possível do campo?

- (A) 99 m^2 (B) 96 m^2 (C) 91 m^2 (D) 84 m^2 (E) 51 m^2

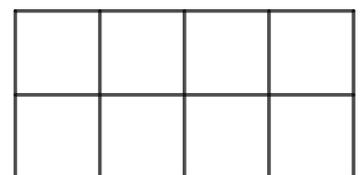
Problemas de 4 pontos

11. Um retângulo é dividido em três regiões de área igual. Uma das regiões é um triângulo equilátero com lado 4 cm, e as outras duas são trapézios, como ilustrado na figura ao lado. Qual é o comprimento do lado comum aos dois trapézios?



- (A) $\sqrt{2}$ cm (B) $\sqrt{3}$ cm (C) $2\sqrt{2}$ cm (D) 3 cm (E) $2\sqrt{3}$ cm

12. A Helena pretende colocar as letras A, B, C e D numa tabela 2×4 , como ilustrado na figura ao lado. Exatamente uma letra é colocada em cada célula. Para além disso, a Helena pretende que em cada quadrado 2×2 cada letra apareça exatamente uma vez. De quantas maneiras diferentes é que é possível a Helena dispor, desta forma, as letras na tabela?



- (A) 12 (B) 24 (C) 48 (D) 96 (E) 198



13. A Clara corta três círculos: um branco, um cinzento e um preto. Na Figura 1 ao lado temos uma ilustração dos círculos quando colocados uns em cima dos outros. A Clara depois coloca os círculos de modo que as circunferências que os delimitam sejam tangentes umas às outras, como ilustrado na Figura 2 ao lado. Na Figura 1 a área da região a preto é sete vezes a área do círculo branco. Qual é a razão entre a área da região a preto da Figura 1 e a área da região a preto da Figura 2?

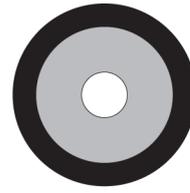


Figura 1

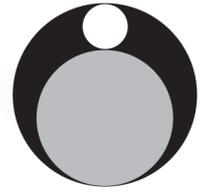


Figura 2

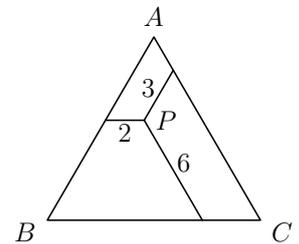
- (A) 3 : 1 (B) 4 : 3 (C) 6 : 5 (D) 7 : 6 (E) 9 : 7

14. A filha da Sra. Deolinda deu hoje à luz uma menina. Daqui a dois anos o produto das idades das três será 2024. Sabemos que hoje a idade da Sra. Deolinda e a idade da sua filha são números pares. Que idade tem hoje a Sra. Deolinda?

- (A) 42 (B) 44 (C) 46 (D) 48 (E) 50

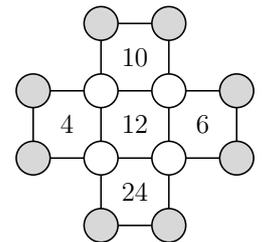
15. Seja P um ponto no interior de um triângulo equilátero. A partir de P desenhemos três segmentos paralelos aos lados do triângulo, como ilustrado na figura ao lado. Os comprimentos dos segmentos são 2 m, 3 m e 6 m. Qual é o perímetro do triângulo?

- (A) 22 m (B) 26 m (C) 33 m (D) 39 m (E) 44 m



16. Na figura ao lado um número é colocado em cada um dos 12 círculos. O número dentro de cada quadrado é o produto dos números nos círculos sobre os quatro vértices. Qual é o produto dos números nos círculos a cinzento?

- (A) 20 (B) 40 (C) 80 (D) 120 (E) 480



17. Sobre uma mesa temos quatro taças dentro das quais foram colocados doces. Na primeira taça, o número de doces é igual ao número de taças que contêm apenas um doce. Na segunda taça, o número de doces é igual ao número de taças que contêm exatamente dois doces. Na terceira taça, o número de doces é igual ao número de taças que contêm exatamente três doces. Na quarta taça, o número de doces é igual ao número de taças que não têm qualquer doce. No total, quantos doces estão em todas as taças?

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

18. O Filipe tem n^3 cubos idênticos, com $n > 2$. Ele usou estes cubos para fazer um cubo maior e pintou toda a superfície exterior deste cubo maior. Em resultado, o número de cubos pequenos com apenas uma face pintada é igual ao número de cubos com nenhuma face pintada. Qual é o valor de n ?

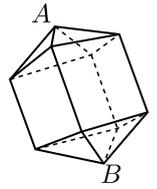
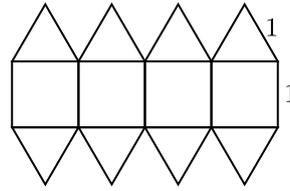
- (A) 4 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 10

19. A Cristina tem um conjunto de cartas numeradas de 1 a 12. Ela coloca 8 destas cartas nos vértices de um octógono de tal modo que a soma de cada par de números em vértices ligados por uma aresta é um múltiplo de 3. Que números é que a Cristina não colocou nos vértices do octógono?

- (A) 1, 5, 9, 12 (B) 3, 5, 7, 9 (C) 1, 2, 11, 12 (D) 5, 6, 7, 8 (E) 3, 6, 9, 12



20. A Oflia fez a planificação de um polígono combinando quadrados e triângulos equiláteros, como ilustrado à esquerda na figura ao lado. O comprimento dos lados de cada quadrado e de cada triângulo é 1 cm. Quando dobrada a planificação obtemos o polígono ilustrado à direita na figura. Qual é a distância entre os vértices A e B ?



- (A) $\sqrt{5}$ cm (B) $(1 + \sqrt{2})$ cm (C) $\frac{5}{2}$ cm
(D) $(1 + \sqrt{3})$ cm (E) $2\sqrt{2}$ cm

Problemas de 5 pontos

21. Para algum número natural n , a fatorização em números primos de $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$ é da forma

$$2^{\text{mancha}} \times 3^{\text{mancha}} \times 5^{\text{mancha}} \times 7^{\text{mancha}} \times 11^{\text{mancha}} \times 13^4 \times 17^{\text{mancha}} \times \text{mancha} \times 43 \times 47$$

onde as manchas cinzentas tapam alguns dos expoentes e alguns dos números primos. Qual é o expoente de 17 nesta fatorização?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

22. O Carlos diz sempre a verdade ou mente sempre em dias alternados. Num mesmo dia ele disse quatro das seguintes cinco frases. Qual das frases seguintes é que ele não pode ter dito nesse dia?

- (A) Eu menti ontem e vou mentir amanhã.
(B) Eu digo a verdade hoje e vou dizer a verdade amanhã.
(C) 2024 é divisível por 11.
(D) Ontem foi quarta-feira.
(E) Amanhã é sábado.

23. A soma de todos os algarismos do número N é três vezes a soma dos algarismos do número $N + 1$. Qual é a menor soma possível dos algarismos de N ?

- (A) 9 (B) 12 (C) 15 (D) 18 (E) 27

24. A Júlia tem vários cubos pretos, cinzentos e brancos com medida de lado 1. Ela usa 27 destes cubos para construir um cubo $3 \times 3 \times 3$. Ela quer que a superfície do cubo construído seja um terço preta, um terço cinzenta e um terço branca. O número mínimo de cubos pretos que ela pode usar é A e o número máximo de cubos pretos que ela pode usar é B . Qual é o valor de $B - A$?

- (A) 1 (B) 3 (C) 6 (D) 7 (E) 9

25. A Ana jogou 24 vezes um dado regular de seis lados, com as faces numeradas de 1 a 6. Todos os números de 1 a 6 saíram pelo menos uma vez, mas o número 1 saiu mais do que qualquer um outro. A soma de todos os números que saíram é o maior número possível nestas condições. Qual é o valor desta soma?

- (A) 83 (B) 84 (C) 89 (D) 90 (E) 100



26. A Olga fez um percurso pedonal num parque. Durante metade do tempo ela caminhou a uma velocidade de 2 km/h. Durante metade da distância ela caminhou a uma velocidade de 3 km/h. O resto do tempo ela caminhou a 4 km/h. Por que fração do tempo total é que a Olga caminhou a 4 km/h?

- (A) $\frac{1}{14}$ (B) $\frac{1}{12}$ (C) $\frac{1}{7}$ (D) $\frac{1}{5}$ (E) $\frac{1}{4}$

27. A Alice retira alguns números da lista de números naturais de 1 a 25. Depois a Alice separa os restantes números em dois grupos tal que o produto dos números de cada grupo seja igual. Qual é o menor número de inteiros que a Alice pode retirar da lista inicial?

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

28. Vinte pontos estão igualmente espaçados numa circunferência. O David desenha todos os possíveis segmentos que unem dois destes pontos. Quantos destes segmentos têm um comprimento maior do que o raio mas menor do que o diâmetro da circunferência?

- (A) 90 (B) 100 (C) 120 (D) 140 (E) 160

29. Consideremos n retas distintas no plano denotadas por ℓ_1, \dots, ℓ_n . A reta ℓ_1 intersesta exatamente 5 das outras retas, a reta ℓ_2 intersesta exatamente 9 das outras retas e a reta ℓ_3 intersesta exatamente 11 das outras retas. Qual é o menor valor possível de n ?

- (A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15

30. Sejam m e n números naturais com $0 < m < n$. Consideremos, num plano com um referencial cartesiano, os pontos de coordenadas $P = (m, n)$, $Q = (n, m)$ e $O = (0, 0)$. Para quantos pares de números m e n é que a área do triângulo $[OPQ]$ é igual a 2024?

- (A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10 (E) 12

