XXII Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Versión en Castellano

---

1. Dado un entero positivo m, se define la sucesión $\{a_n\}$ de la siguiente manera:

$$a_1 = \frac{m}{2}, \qquad a_{n+1} = a_n \lceil a_n \rceil, \text{ si } n \geq 1.$$

Determinar todos los valores de m para los cuales a_{2007} es el primer entero que aparece en la sucesión.

Nota: Para un número real x se define $\lceil x \rceil$ como el menor entero que es mayor o igual a x. Por ejemplo, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil 2007 \rceil = 2007$.

2. Sean ABC un triángulo con incentro I y Γ una circunferencia de centro I, de radio mayor al de la circunferencia inscrita y que no pasa por ninguno de los vértices. Sean X_1 el punto de intersección de Γ con la recta AB más cercano a B; X_2, X_3 los puntos de intersección de Γ con la recta BC siendo X_2 más cercano a B; y X_4 el punto de intersección de Γ con la recta CA más cercano a C. Sea K el punto de intersección de las rectas X_1X_2 y X_3X_4. Demostrar que AK corta al segmento X_2X_3 en su punto medio.

3. Dos equipos, A y B, disputan el territorio limitado por una circunferencia.

A tiene n banderas azules y B tiene n banderas blancas ($n \geq 2$, fijo). Juegan alternadamente y A comienza el juego. Cada equipo, en su turno, coloca una de sus banderas en un punto de la circunferencia que no se haya usado en una jugada anterior. Cada bandera, una vez colocada, no se puede cambiar de lugar.

Una vez colocadas las $2n$ banderas se reparte el territorio entre los dos equipos. Un punto del territorio es del equipo A si la bandera más próxima a él es azul, y es del equipo B si la bandera más próxima a él es blanca. Si la bandera azul más próxima a un punto está a la misma distancia que la bandera blanca más próxima a ese punto, entonces el punto es neutro (no es de A ni de B). Un equipo gana el juego si sus puntos cubren un área mayor que el área cubierta por los puntos del otro equipo. Hay empate si ambos cubren áreas iguales.

Demostrar que, para todo n, el equipo B tiene estrategia para ganar el juego.

Duración: 4 horas 30 minutos
