

TABELAS

PRIMITIVAS IMEDIATAS

Função	Primitiva
$a$	$ax + C$
$f^m f'$	$\frac{f^{m+1}}{m+1} + C \ (m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$
$\frac{f'}{f}$	$\ln  f  + C$
$a^f f'$	$\frac{a^f}{\ln a} + C \ (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Funções trigonométricas	
Função	Primitiva
$f' \operatorname{sen} f$	$-\cos f + C$
$f' \operatorname{cos} f$	$\operatorname{sen} f + C$
$f' \operatorname{tg} f$	$-\ln  \cos f  + C$
$f' \operatorname{cotg} f$	$\ln  \operatorname{sen} f  + C$
$f' \operatorname{sec} f$	$\ln  \operatorname{sec} f + \operatorname{tg} f  + C$
$f' \operatorname{cosec} f$	$\ln  \operatorname{cosec} f - \operatorname{cotg} f  + C$
$f' \operatorname{sec}^2 f$	$\operatorname{tg} f + C$
$f' \operatorname{cosec}^2 f$	$-\operatorname{cotg} f + C$
$f' \operatorname{sec} f \operatorname{tg} f$	$\operatorname{sec} f + C$
$f' \operatorname{cosec} f \operatorname{cotg} f$	$-\operatorname{cosec} f + C$
$\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$\operatorname{arc} \operatorname{sen} f + C \quad \text{ou}$ $-\operatorname{arc} \operatorname{cos} f + C$
$\frac{f'}{1+f^2}$	$\operatorname{arc} \operatorname{tg} f + C \quad \text{ou}$ $-\operatorname{arc} \operatorname{cotg} f + C$
$\frac{f'}{ f  \sqrt{f^2-1}}$	$\operatorname{arc} \operatorname{sec} f + C \quad \text{ou}$ $-\operatorname{arc} \operatorname{cosec} f + C$

Funções hiperbólicas	
Função	Primitiva
$f' \operatorname{sh} f$	$\operatorname{ch} f + C$
$f' \operatorname{ch} f$	$\operatorname{sh} f + C$
$f' \operatorname{th} f$	$\ln (\operatorname{ch} f) + C$
$f' \operatorname{coth} f$	$\ln  \operatorname{sh} f  + C$
$f' \operatorname{sech}^2 f$	$\operatorname{th} f + C$
$f' \operatorname{cosech}^2 f$	$-\operatorname{coth} f + C$
$f' \operatorname{sech} f \operatorname{th} f$	$-\operatorname{sech} f + C$
$f' \operatorname{cosech} f \operatorname{coth} f$	$-\operatorname{cosech} f + C$
$\frac{f'}{\sqrt{1+f^2}}$	$\operatorname{arg} \operatorname{sh} f + C$
$\frac{f'}{\sqrt{f^2-1}}$	$\operatorname{arg} \operatorname{ch} f + C$
$\frac{f'}{1-f^2}$	$\operatorname{arg} \operatorname{th} f + C, \quad  f  < 1,$ $\operatorname{arg} \operatorname{coth} f + C, \quad  f  > 1$
$\frac{f'}{ f  \sqrt{1-f^2}}$	$-\operatorname{arg} \operatorname{sech} f + C$
$\frac{f'}{ f  \sqrt{1+f^2}}$	$\operatorname{arg} \operatorname{cosech} f + C$

---

## PRIMITIVAÇÃO POR PARTES

---

$$\int f(x)g(x) dx = F(x)g(x) - \int F'(x)g'(x) dx,$$

sendo  $F$  uma primitiva de  $f$ .

---

## REGRAS PRÁTICAS

---

### Potências de funções trigonométricas ou hiperbólicas

Potências ímpares de  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{sh} x$  ou  $\operatorname{ch} x$ . Destaca-se uma unidade à potência ímpar e o factor resultante passa-se para a co-função através das fórmulas fundamentais:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

Potências pares de  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{sh} x$  ou  $\operatorname{ch} x$ . Passa-se para o arco duplo através das fórmulas:

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), & \cos^2 x &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \\ \operatorname{sh}^2 x &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - 1), & \operatorname{ch}^2 x &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + 1). \end{aligned}$$

Potências pares e ímpares de  $\operatorname{tg} x$  ( $\operatorname{th} x$ ) ou  $\operatorname{cotg} x$  ( $\operatorname{coth} x$ ). Destaca-se  $\operatorname{tg}^2 x$  ( $\operatorname{th}^2 x$ ) ou  $\operatorname{cotg}^2 x$  ( $\operatorname{coth}^2 x$ ) e aplica-se uma das fórmulas:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 x &= \sec^2 x - 1, & (\operatorname{th}^2 x &= 1 - \operatorname{sech}^2 x), \\ \operatorname{cotg}^2 x &= \operatorname{cosec}^2 x - 1, & (\operatorname{coth}^2 x &= 1 + \operatorname{cosech}^2 x). \end{aligned}$$

Potências pares de  $\sec x$  ( $\operatorname{sech} x$ ) ou  $\operatorname{cosec} x$  ( $\operatorname{cosech} x$ ). Destaca-se  $\sec^2 x$  ( $\operatorname{sech}^2 x$ ) ou  $\operatorname{cosec}^2 x$  ( $\operatorname{cosech}^2 x$ ) e ao factor resultante aplica-se uma das fórmulas:

$$\begin{aligned} \sec^2 x &= 1 + \operatorname{tg}^2 x, & (\operatorname{sech}^2 x &= 1 - \operatorname{th}^2 x), \\ \operatorname{cosec}^2 x &= 1 + \operatorname{cotg}^2 x, & (\operatorname{cosech}^2 x &= \operatorname{coth}^2 x - 1). \end{aligned}$$

Potências ímpares de  $\sec x$  ( $\operatorname{sech} x$ ) ou  $\operatorname{cosec} x$  ( $\operatorname{cosech} x$ ). Destaca-se  $\sec^2 x$  ( $\operatorname{sech}^2 x$ ) ou  $\operatorname{cosec}^2 x$  ( $\operatorname{cosech}^2 x$ ) e primitiva-se por partes começando por esse factor.

### Produtos de potências de funções trigonométricas ou hiperbólicas

Potência ímpar de  $\sin x$  ( $\operatorname{sh} x$ ) por qualquer potência de  $\cos x$  ( $\operatorname{ch} x$ ). Destaca-se  $\sin x$  ( $\operatorname{sh} x$ ) e passa-se o factor resultante para a co-função através da fórmula fundamental:

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x, \quad (\operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x - 1).$$

Potência ímpar de  $\cos x$  ( $\operatorname{ch} x$ ) por qualquer potência de  $\sin x$  ( $\operatorname{sh} x$ ). Destaca-se  $\cos x$  ( $\operatorname{ch} x$ ) e passa-se o factor resultante para a co-função através da fórmula fundamental:

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x, \quad (\operatorname{ch}^2 x = 1 + \operatorname{sh}^2 x).$$

Potência par de  $\operatorname{sen} x$  ( $\operatorname{sh} x$ ) por potência par de  $\cos x$  ( $\operatorname{ch} x$ ). Aplicam-se as fórmulas:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 2x &= 2 \operatorname{sen} x \cos x, & (\operatorname{sh} 2x &= 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x), \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x, & (\operatorname{ch} 2x &= \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x), \\ \operatorname{sen}^2 x &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), & \left( \operatorname{sh}^2 x &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - 1) \right), \\ \cos^2 x &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), & \left( \operatorname{ch}^2 x &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + 1) \right).\end{aligned}$$

**Produtos em que aparecem factores do tipo  $\operatorname{sen} mx$  ou  $\cos nx$  ( $\operatorname{sh} mx$  ou  $\operatorname{ch} nx$ )**

Aplicam-se as fórmulas:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y &= \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y)), & \left( \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(x + y) - \operatorname{ch}(x - y)) \right), \\ \cos x \cos y &= \frac{1}{2}(\cos(x + y) + \cos(x - y)), & \left( \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(x + y) + \operatorname{ch}(x - y)) \right), \\ \operatorname{sen} x \cos y &= \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y)), & \left( \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y &= \frac{1}{2}(\operatorname{sh}(x + y) + \operatorname{sh}(x - y)) \right).\end{aligned}$$

### PRIMITIVAÇÃO DE FRACÇÕES RACIONAIS

Consideremos a fracção  $\frac{f(x)}{g(x)}$  onde  $f(x)$  e  $g(x)$  são dois polinómios. Se o grau do numerador for maior ou igual ao grau do denominador, efectua-se a divisão de  $f(x)$  por  $g(x)$ . Obtém-se então

$$\frac{f(x)}{g(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{g(x)},$$

sendo  $\frac{R(x)}{g(x)}$  uma fracção própria. Para primitivar a fracção própria procede-se de acordo com os seguintes passos.

**Decomposição do denominador da fracção própria em factores.** Os factores obtidos são da forma  $(x - a)^\alpha$ , correspondendo a raízes reais  $a$  de multiplicidade  $\alpha$ , ou da forma  $[(x - p)^2 + q^2]^\beta$ , correspondendo às raízes imaginárias  $p \pm qi$  de multiplicidade  $\beta$ .

**Decomposição da fracção própria numa soma de elementos simples.** Cada factor do tipo:

1.  $(x - a)^\alpha$  dá origem a

$$\frac{A_1}{(x - a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x - a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_\alpha}{x - a},$$

com  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, \alpha$ , constantes a determinar;

2.  $[(x - p)^2 + q^2]^\beta$  dá origem a

$$\frac{P_1x + Q_1}{[(x - p)^2 + q^2]^\beta} + \frac{P_2x + Q_2}{[(x - p)^2 + q^2]^{\beta-1}} + \cdots + \frac{P_\beta x + Q_\beta}{(x - p)^2 + q^2},$$

com  $P_j$ ,  $Q_j$ ,  $j = 1, \dots, \beta$ , constantes a determinar.

**Determinação das constantes.** As constantes  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, \alpha$ , e  $P_j$ ,  $Q_j$ ,  $j = 1, \dots, \beta$ , podem ser determinadas conjuntamente pelo *método dos coeficientes indeterminados*. Há, no entanto, uma forma alternativa de calcular essas constantes, que descrevemos de seguida.

1. Cálculo dos coeficientes  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, \alpha$ . Seja  $\psi(x)$  tal que  $g(x) = \psi(x)(x - a)^\alpha$ . Se:

(a)  $\alpha = 1$ , temos que

$$A_1 = \left[ \frac{R(x)}{\psi(x)} \right]_{x=a};$$

(b)  $\alpha > 1$ , efectua-se a divisão

$$\left[ \frac{R(x)}{\psi(x)} \right]_{x=a+h}$$

dispondo os polinómios por ordem crescente dos seus monómios, obtendo-se

$$\left[ \frac{R(x)}{\psi(x)} \right]_{x=a+h} = A_1 + A_2h + \dots + A_\alpha h^{\alpha-1} + \frac{R_\alpha(a+h)}{\psi(a+h)}.$$

2. Cálculo dos coeficientes  $P_j$ ,  $Q_j$ ,  $j = 1, \dots, \beta$ . Seja  $\psi(x)$  tal que  $g(x) = \psi(x) [(x - p)^2 + q^2]^\beta$ . Se:

(a)  $\beta = 1$ , temos que

$$\left[ P_1x + Q_1 = \frac{R(x)}{\psi(x)} \right]_{x=p+qi};$$

(b)  $\alpha > 1$ , as constantes calculam-se pelo método dos coeficientes indeterminados (as constantes  $P_1$  e  $Q_1$  podem ser obtidas como em (a)).

*Nota:* Caso apareçam elementos simples da forma  $\frac{1}{[(x - p)^2 + c]^n}$ , estes podem ser primitivados usando a seguinte fórmula de recorrência:

$$\int \left( \frac{1}{[(x - p)^2 + c]^n} \right) dx = \frac{1}{c} \left[ \frac{1}{2n - 2} \times \frac{x - p}{[(x - p)^2 + c]^{n-1}} + \frac{2n - 3}{2n - 2} \int \left( \frac{1}{[(x - p)^2 + c]^{n-1}} \right) dx \right].$$

### PRIMITIVAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

Sejam  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  constantes reais. A notação  $R(\dots)$  indica que se trata de uma função racional (envolvendo apenas somas, diferenças, produtos e quocientes) do que se encontra entre parêntesis.

Tipo de Função	Substituição
$\frac{1}{(x^2 + a^2)^k}$ , $k \in \mathbb{N}$ , $k > 1$	$x = a \operatorname{tg} t$
$\frac{P(x)}{(ax^2 + bx + c)^k}$ , $k \in \mathbb{N}$ , $k > 1$ , $b^2 - 4ac < 0$ , onde $P(x)$ é um polinómio de grau inferior ou igual a $2k$	$ax + \frac{b}{2} = t$
$\frac{P(x)}{((x - p)^2 + q^2)^k}$ , $k \in \mathbb{N}$ , $k > 1$ , onde $P(x)$ é um polinómio de grau inferior ou igual a $2k$	$x = p + qt$
$\frac{x^{k-1}}{x^{2k} \pm a^2}$ , $k \in \mathbb{Q}$ , $k > 1$	$x^k = at$

Tipo de Função	Substituição
$R(a^{rx}, a^{sx}, \dots)$	$a^{mx} = t$ onde $m = m.d.c.(r, s, \dots)$
$R(\log_a x)$	$t = \log_a x$
$R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}, \dots\right)$	$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m$ onde $m = m.m.c.(q, s, \dots)$
$R\left(x, (ax+b)^{\frac{p}{q}}, (ax+b)^{\frac{r}{s}}, \dots\right)$	$ax+b = t^m$ onde $m = m.m.c.(q, s, \dots)$
$R\left(x, x^{\frac{p}{q}}, x^{\frac{r}{s}}, \dots\right)$	$x = t^m$ onde $m = m.m.c.(q, s, \dots)$
$R\left(x, \sqrt{a^2 - b^2x^2}\right)$	$x = \frac{a}{b} \operatorname{sen} t$ ou $x = \frac{a}{b} \operatorname{cos} t$ ou $x = \frac{a}{b} \operatorname{th} t$
$R\left(x, \sqrt{a^2 + b^2x^2}\right)$	$x = \frac{a}{b} \operatorname{tg} t$ ou $x = \frac{a}{b} \operatorname{sh} t$
$R\left(x, \sqrt{b^2x^2 - a^2}\right)$ $R\left(x, \sqrt{x}, \sqrt{a - bx}\right)$	$x = \frac{a}{b} \operatorname{sec} t$ ou $x = \frac{a}{b} \operatorname{ch} t$ $x = \frac{a}{b} \operatorname{sen}^2 t$ ou $x = \frac{a}{b} \operatorname{cos}^2 t$
$R\left(x, \sqrt{x}, \sqrt{a + bx}\right)$	$x = \frac{a}{b} \operatorname{tg}^2 t$
$R\left(x, \sqrt{x}, \sqrt{bx - a}\right)$	$x = \frac{a}{b} \operatorname{sec}^2 t$
$R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)$	se $a > 0$ faz-se $\sqrt{ax^2 + bx + c} = x\sqrt{a} + t$ se $c > 0$ faz-se $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} + tx$ se $ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$ , $\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - r_1)t$ ou $\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - r_2)t$
$x^m(a + bx^n)^{\frac{p}{q}}$	se $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ faz-se $a + bx^n = t^q$ se $\frac{m+1}{n} + \frac{p}{q} \in \mathbb{Z}$ faz-se $a + bx^n = x^n t^q$

Tipo de Função	Substituição
$R(\sin x, \cos x)$ : (a) se $R(u, v)$ é ímpar na variável $u$ , isto é, $R(-u, v) = -R(u, v)$ (b) se $R(u, v)$ é ímpar na variável $v$ , isto é, $R(u, -v) = -R(u, v)$ (c) se $R(u, v)$ é par em nas variáveis $u$ e $v$ , isto é, $R(-u, -v) = R(u, v)$  (d) nos restantes casos (e até nos anteriores)	$\cos x = t$  $\sin x = t$  $\operatorname{tg} x = t$ , obtendo então (supondo $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ ) $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ , obtendo então $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
$R(\sin mx, \cos mx)$	$mx = t$
$R(e^x, \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$	$x = \ln t$
$R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$ : (a) $R$ é ímpar em $\operatorname{sh} x$ (b) $R$ é ímpar em $\operatorname{ch} x$ (c) $R$ é par em $\operatorname{sh} x$ e $\operatorname{ch} x$  (d) nos restantes casos (e até nos anteriores)	$\operatorname{ch} x = t$ $\operatorname{sh} x = t$ $\operatorname{th} x = t$ , obtendo então $\operatorname{sh} x = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}, \operatorname{ch} x = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ $\operatorname{th} \frac{x}{2} = t$ , obtendo então $\operatorname{sh} t = \frac{2t}{1-t^2}, \operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$
$R(\operatorname{sh} mx, \operatorname{ch} mx)$	$mx = t$

*Observação:* Quando se efectua uma substituição, aparece frequentemente uma expressão do tipo  $\sqrt{f^2(t)}$ . No caso geral terá de se escrever

$$\sqrt{f^2(t)} = |f(t)|.$$