Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Matemática (Licenciatura em Farmácia Biomédica)

17 de Janeiro de 2011 Duração: 2,5 horas

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Supondo um peixe a nadar contra uma corrente u a uma velocidade, em relação à água, v ($v > u$), a energia total E requerida para nadar uma distância L é dada por

$$E(v) = av^3 \frac{L}{v-u}$$

onde a é uma constante de proporcionalidade positiva. Os biólogos verificaram experimentalmente que os peixes migratórios nadam contra a corrente a uma velocidade 50% superior à velocidade da corrente. Mostre que esse valor corresponde à velocidade que minimiza a energia total requerida para nadar uma distância fixa.

2. Das afirmações seguintes, indique quais são verdadeiras e quais são falsas, justificando convenientemente.

   (a) Se o raio de um círculo aumenta a uma taxa de 2 cm/s, o seu volume, quando o raio é de 10 cm, aumenta a uma taxa de 10 cm^3/s.

   (b) A taxa de variação máxima de $f(x, y) = y^2 + \operatorname{sen}(xy)$ em $P = (\pi, 1)$ é igual a π.

   (c) A função $y = (\ln x)/x$ é uma solução da equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

   (d) Se b é uma coluna de A então o sistema $Ax = b$ é possível.

3. (a) Calcule

$$\int \frac{1}{(1-x)\sqrt{x}}\, dx,$$

   usando a mudança de variável $x = t^2$.

   (b) Determine o valor de a por forma a que a área da figura limitada por $0 \leq y \leq e^{-x}$ e $-a \leq x \leq a$ seja $\frac{8}{3}$.

   (c) Determine a natureza do integral

$$\int_0^1 x \ln x \, dx.$$

4. A taxa de propagação de um boato numa população é proporcional não apenas ao número y de pessoas que ouviu o boato mas também ao número de pessoas que ainda não o ouviu.

   (a) Escreva uma equação diferencial que seja satisfeita por y, supondo uma população com S indivíduos.

   (b) Resolva a equação diferencial.

   (c) Numa cidade com 1000 habitantes, 80 pessoas tinham ouvido o boato às 8h00 da manhã. Ao meio-dia metade da cidade já tinha ouvido o boato. A que horas 90% da população terá ouvido o boato?

5. Determine a solução do problema de condição inicial

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & \dfrac{2x}{1-x^2} y + 2x \\ y(0) & = & 1 \end{array} \right. .$$

v.s.f.f.

6. Considere o sistema linear $Ax = b$ com $b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ e

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

   (a) Calcule a matriz A.
   (b) Para que valores de α o sistema é possível e determinado?
   (c) Admita que $\alpha = 4$.
      i. A matriz A é ortogonal, isto é, $A^{-1} = A^T$?
      ii. Resolva o sistema linear $Ax = b$.

7. O proprietário de uma empresa em rápido crescimento económico verificou que, nos primeiros seis anos, o lucro, L, da sua empresa em função do número de anos decorridos, N, poderia ser aproximado por uma transformação linear $L = a + bN$. Atendendo a que os resultados do seu negócio foram

N (número de anos)	0	1	3	6
L (lucro, em milhares de euros)	0	1	3	4

,

determine:

   (a) a recta dos mínimos quadrados para o problema descrito;
   (b) um valor para o lucro previsível no final do sétimo ano.

Formulário	
Primitiva de $f^m \; f'$	$\dfrac{f^{m+1}}{m+1} + C \; (m \in \mathbb{R}\backslash\{-1\})$
Primitiva de $\dfrac{f'}{f}$	$\ln\|f\| + C$
Factor integrante nas equações $y' + P(x)y = Q(x)$	$I(x) = e^{\int P(x)dx}$
Solução dos mínimos quadrados para $Ax = b$	$A^T A x = A^T b$