

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Supondo um peixe a nadar contra uma corrente u a uma velocidade, em relação à água, v ($v > u$), a energia total E requerida para nadar uma distância L é dada por

$$E(v) = av^3 \frac{L}{v - u}$$

onde a é uma constante de proporcionalidade positiva. Os biólogos verificaram experimentalmente que os peixes migratórios nadam contra a corrente a uma velocidade 50% superior à velocidade da corrente. Mostre que esse valor corresponde à velocidade que minimiza a energia total requerida para nadar uma distância fixa.

2. Das afirmações seguintes, indique quais são verdadeiras e quais são falsas, justificando convenientemente.
- (a) Se o raio de um círculo aumenta a uma taxa de 2 cm/s, o seu volume, quando o raio é de 10 cm, aumenta a uma taxa de 10 cm³/s.
- (b) A taxa de variação máxima de $f(x, y) = xy^2 + \sin(xy)$ em $P = (\pi, 1)$ é igual a π .
- (c) Se f' é contínua em $[0, +\infty[$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, então $\int_0^{+\infty} f'(x) dx = -f(0)$.
- (d) Se a matriz invertível A verifica $A^2 - 3A + I = 0$, em que I é a matriz identidade, então

$$A^{-1} = 3I - A.$$

3. (a) Calcule $\int \frac{e^x}{\sqrt[3]{1 + 2e^x}} dx$.

(b) Calcule

$$\int \frac{1}{(1-x)\sqrt{x}} dx,$$

usando a mudança de variável $x = t^2$.

- (c) Determine o valor de a por forma a que a área da figura limitada por $0 \leq y \leq e^{-x}$ e $-a \leq x \leq a$ seja $\frac{8}{3}$.
- (d) Determine a natureza do integral

$$\int_0^1 x \ln x dx.$$

4. A taxa de propagação de um boato numa população é proporcional não apenas ao número y de pessoas que ouviu o boato mas também ao número de pessoas que ainda não o ouviu. Numa cidade com 1000 habitantes, 80 pessoas tinham ouvido o boato às 8h00 da manhã e ao meio-dia já metade da cidade o tinha ouvido. A que horas 90% da população tomou conhecimento do boato?
5. Determine a solução do problema de condição inicial

$$\begin{cases} (1+x^2)y' + 2xy = (1+x^2)x \\ y(0) = 1 \end{cases},$$

com $x \in [0, 1]$.

6. Em função do valor do parâmetro real k , discuta a natureza do sistema

$$\begin{cases} x + y + kz = 1 \\ x + ky + z = k \\ kx + y + z = k^2 \end{cases} .$$

7. Um pára-quedista efectuou cinco saltos de alturas diferentes, tendo medido a distância a um alvo constituído por uma circunferência de raio 5 metros traçada no solo e obtendo a seguinte tabela

Altura do salto (m)	1500	1250	1000	750	500
Distância do alvo (m)	35	25	15	10	7

Use a recta dos mínimos quadrados para estimar a distância do alvo a que o pára-quedista cairia se saltasse de uma altura de 850 m.

Formulário	
Primitiva de $f^m f'$	$\frac{f^{m+1}}{m+1} + C \quad (m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$
Primitiva de $\frac{f'}{f}$	$\ln f + C$
Primitiva de $a^f f'$	$\frac{a^f}{\ln a} + C \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$
Factor integrante nas equações $y' + P(x)y = Q(x)$	$I(x) = e^{\int P(x)dx}$
Solução dos mínimos quadrados para $Ax = b$	$A^T Ax = A^T b$