

**Observação:** A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Num determinado meio aquático, o plâncton, organismo vivo responsável pelo alimento dos peixes, reproduz-se com uma taxa de crescimento  $r$ . Ao mesmo tempo, os peixes alimentam-se a uma taxa proporcional à concentração de plâncton naquele instante. Se a taxa  $k$  a que os peixes se alimentam for superior à taxa de crescimento  $r$ , o plâncton tende para a extinção. Para evitar essa situação, uma equipa de cientistas decidiu adicionar plâncton artificialmente ao meio aquático, a uma taxa constante  $a$ . A equação diferencial que permite obter o modelo para a concentração de plâncton,  $y(t)$ , no instante  $t$  (medido em meses) é portanto

$$\frac{dy}{dt} = (r - k)y + a.$$

Experimentalmente, obtiveram-se os valores  $k = 2\%$  e  $r = 1\%$ . Supondo  $y(0) = 2 \text{ mg m}^{-3}$ , determine:

- (a) o valor da concentração ao fim de  $t$  meses;
  - (b) o valor de  $a$  que garanta que a concentração de plâncton tenda para  $5 \text{ mg m}^{-3}$ .
2. Das afirmações seguintes, indique quais são verdadeiras e quais são falsas, justificando convenientemente.
- (a) Qualquer que seja a matriz  $A$ , a matriz  $A^T A$  é quadrada e simétrica.
  - (b) Se  $A$  e  $B$  são duas matrizes tais que  $AB = 0$ , então  $A = 0$  ou  $B = 0$ .
  - (c) Todas as soluções de  $y' = -1 - y^4$  são funções decrescentes.

3. Determine a solução do problema de condição inicial  $\begin{cases} y' &= 2ty + 3te^{t^2} \\ y(0) &= 5 \end{cases}$ .

4. Em função do valor do parâmetro real  $\beta$ , discuta a natureza do sistema  $\begin{cases} x + \beta y + \beta z &= 0 \\ \beta x + y + z &= 0 \\ x + \beta y + z &= \beta^2 \end{cases}$ .

5. Foi feito um estudo com o objectivo de averiguar a existência de uma relação linear entre a pressão diastólica (em mmHg), que denotaremos por  $y$ , e a pressão sistólica,  $x$ , de um indivíduo. Para tal, seleccionaram-se aleatoriamente 5 indivíduos cujas observações permitiram registar o seguinte:

$x$	80	90	100	110	120
$y$	52	57	61	65	75

- (a) Determine a recta dos mínimos quadrados para o problema descrito.
- (b) Obtenha uma estimativa para o valor da pressão diastólica de um indivíduo com pressão sistólica de 85 mmHg.

Formulário	
Primitiva de $f^m f'$	$\frac{f^{m+1}}{m+1} + C \quad (m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$
Primitiva de $\frac{f'}{f}$	$\ln  f  + C$
Primitiva de $a^f f'$	$\frac{a^f}{\ln a} + C \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$
Factor integrante nas equações $y' + P(x)y = Q(x)$	$I(x) = e^{\int P(x)dx}$
Solução dos mínimos quadrados para $Ax = b$	$A^T Ax = A^T b$