Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Frequência Modelo de Biomatemática (Licenciatura em Farmácia Biomédica)

19 Novembro de 2010 Duração: 1,5 horas

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Supondo um peixe a nadar contra uma corrente u a uma velocidade, em relação à água, v ($v > u$), a energia total E requerida para nadar uma distância L é dada por

$$E(v) = av^3 \frac{L}{v-u}$$

onde a é uma constante de proporcionalidade positiva. Os biólogos verificaram experimentalmente que os peixes migratórios nadam contra a corrente a uma velocidade 50% superior à velocidade da corrente. Mostre que esse valor corresponde à velocidade que minimiza a energia total requerida para nadar uma distância fixa.

2. Das afirmações seguintes, indique quais são verdadeiras e quais são falsas, justificando convenientemente.

   (a) Se f é uma função diferenciável em $]a, b[$ e $f'(c) = 0$, com $c \in]a, b[$, então f tem um extremo local em $x = c$.

   (b) $x^3 - 3x + 3 = 0$ tem uma e uma só raiz real.

   (c) Se f é integrável em $[-a, a]$ e f é ímpar, então $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

   (d) $\ln a \leq \int_1^a \frac{e^t}{t}\,dt, \qquad a \geq 1.$

3. Calcule o valor dos seguintes integrais

   (a) $\displaystyle\int x \ln \frac{x}{x+1}\,dx$;

   (b) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-3x^2}}\,dx$;

   (c) $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{(1-x)\sqrt{x}}\,dx$, com a substituição $x = t^2$.

4. Calcule o volume de um cone de altura h e raio da base r.

5. Uma substância radioactiva decai exponencialmente. Assim, a massa no tempo t é $m(t) = m(0)e^{kt}$, onde $m(0)$ é a massa inicial e k uma constante negativa. A "vida média" de um átomo na substância é dada por

$$M = -k \int_0^\infty te^{kt}\,dt.$$

Para o isótopo radioactivo de carbono ^{14}C, usado na datação, o valor de k é -0.000121. Calcule a vida média de um átomo de ^{14}C.

Função	Primitiva
$f^m\ f'$	$\frac{f^{m+1}}{m+1} + C\ (m \in \mathbb{R}\backslash\{-1\})$
$\frac{f'}{f}$	$\ln\lvert f\rvert + C$
$a^f\ f'$	$\frac{a^f}{\ln a} + C$
$\frac{f'}{1+f^2}$	$\text{arc tg}\, f + C$