
FUNÇÕES POLINOMIAIS

Se a_0, a_1, \dots, a_n forem números reais, uma função polinomial tem a forma

$$\begin{aligned} f: D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0. \end{aligned}$$

Podemos tomar para D qualquer subconjunto de \mathbb{R} .

FUNÇÕES IRRACIONAIS

Seja $P(x)$ um polinómio. As funções do tipo

$$\begin{aligned} f: D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \left(\sqrt[q]{P(x)}\right)^p, \end{aligned}$$

com $p, q \in \mathbb{N}$, são ditas irracionais. O seu maior domínio será \mathbb{R} se q for ímpar e $\{x \in \mathbb{R} : P(x) \geq 0\}$ se q for par.

FRACÇÕES RACIONAIS

Sejam $P(x)$ e $Q(x)$ dois polinómios. As fracções racionais são funções do tipo

$$\begin{aligned} f: D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}. \end{aligned}$$

Podemos tomar para D qualquer subconjunto de \mathbb{R} onde Q não se anule.

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Se $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$ então

$$a^{p/q}, \quad a \in \mathbb{R}^+,$$

tem uma definição elementar. Se x é um número irracional então a definição de a^x pode ser dada como se segue: se $x_n = \frac{p_n}{q_n}$ for o termo geral de uma sucessão de números racionais convergente para x , então a^x é o limite (que existe sempre) da sucessão de termo geral a^{x_n} .

Temos assim que para todo o $a > 0$ é possível definir a função exponencial de domínio \mathbb{R} que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa a^x . Quando $a = e$ (número de Euler), sendo

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.718281828459045 \dots,$$

temos a chamada função exponencial natural.

Propriedades

$$e^{x+y} = e^x e^y, \quad (e^x)^y = e^{xy}.$$

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Logaritmo de base a : $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x, \quad a > 0, \quad a \neq 1;$
Logaritmo de base 10: $y = \log x \Leftrightarrow 10^y = x;$
Logaritmo natural: $y = \ln x \Leftrightarrow e^y = x.$

Propriedades

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y, \quad \ln x^y = y \ln x; \quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad (\text{mudança de base}).$$

FUNÇÕES $f(x)^{g(x)}$

Por definição

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)},$$

onde e é o número de Euler. Isto significa que $f(x)^{g(x)}$ só está definida se $f(x) > 0$. Nalguns casos particulares que não exijam esta definição, como é o caso de $f(x)^{p/q} = \left(\sqrt[q]{f(x)}\right)^p$, o domínio pode ser alargado.

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS DIRECTAS

Fórmulas fundamentais

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Outras funções trigonométricas

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$

Outras fórmulas importantes

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x, \quad \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \quad \operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

$$\begin{aligned} y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x &\Leftrightarrow \operatorname{sen} y = x, & -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}; & \quad y = \operatorname{arc} \operatorname{cos} x &\Leftrightarrow \operatorname{cos} y = x, & 0 \leq y \leq \pi; \\ y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x &\Leftrightarrow \operatorname{tg} y = x, & -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}; & \quad y = \operatorname{arc} \operatorname{cotg} x &\Leftrightarrow \operatorname{cotg} y = x, & 0 < y < \pi; \\ y = \operatorname{arc} \operatorname{sec} x &\Leftrightarrow \operatorname{sec} y = x, & 0 < y < \pi; & \quad y = \operatorname{arc} \operatorname{cosec} x &\Leftrightarrow \operatorname{cosec} y = x, & -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Principais fórmulas

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) = \operatorname{arc} \operatorname{cosec} \left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \right);$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \operatorname{cotg} x + \operatorname{arc} \operatorname{sen} x + \operatorname{arc} \operatorname{cos} x = \operatorname{arc} \operatorname{cosec} x + \operatorname{arc} \operatorname{sec} x = \frac{\pi}{2}.$$

FUNÇÕES HIPERBÓLICAS DIRECTAS

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Fórmula fundamental

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

Outras fórmulas importantes

$$\operatorname{sh}(x + y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y.$$

Outras funções hiperbólicas

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{coth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}, \quad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cosech} x = \frac{1}{\operatorname{sh} x}.$$

FUNÇÕES HIPERBÓLICAS INVERSAS

$$\begin{aligned} y = \arg \operatorname{sh} x &\Leftrightarrow \operatorname{sh} y = x; & y = \arg \operatorname{ch} x &\Leftrightarrow \operatorname{ch} y = x, \quad 0 \leq y; \\ y = \arg \operatorname{th} x &\Leftrightarrow \operatorname{th} y = x; & y = \arg \operatorname{coth} x &\Leftrightarrow \operatorname{coth} y = x, \quad y \neq 0; \\ y = \arg \operatorname{sech} x &\Leftrightarrow \operatorname{sech} y = x, \quad 0 \leq y; & y = \arg \operatorname{cosech} x &\Leftrightarrow \operatorname{cosech} y = x, \quad y \neq 0. \end{aligned}$$

Fórmulas de redução

$$\begin{aligned} \arg \operatorname{sh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), & \arg \operatorname{ch} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1, \\ \arg \operatorname{th} x &= \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right), \quad |x| < 1, & \arg \operatorname{coth} x &= \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right), \quad |x| > 1, \\ \arg \operatorname{sech} x &= \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x}\right), \quad 0 < x \leq 1 & \arg \operatorname{cosech} x &= \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right). \end{aligned}$$

Principais fórmulas que relacionam as funções hiperbólicas inversas

$$\arg \operatorname{sh} x = \operatorname{sgn}(x) \arg \operatorname{ch}\left(\sqrt{1+x^2}\right) = \arg \operatorname{th}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right), \quad \arg \operatorname{ch} x = \arg \operatorname{sh}\left(\sqrt{x^2-1}\right), \quad x \geq 1.$$

FUNÇÕES DESCONTÍNUAS

Função sinal

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Função Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1/2, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Função retângulo

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1/2, \\ 0, & |x| > 1/2. \end{cases}$$

Função característica

Se $n \leq x \leq n + 1, n \in \mathbb{Z}$, $C(x) := [x] = n$ (maior inteiro inferior ou igual a x).

Função mantissa

$$M(x) = x - [x] \quad (\text{parte decimal de } x).$$

Relações importantes

$$\Pi(x) = H\left(x + \frac{1}{2}\right) - H\left(x - \frac{1}{2}\right), \quad \operatorname{sgn}(x) = 2H(x) - 1.$$

ALGUNS GRÁFICOS

