Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Segunda Frequência de Tratamento Matemático das Observações (Eng. Geográfica)

23 de Abril de 2003 — Duração: 1h30m

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Considere a curva de Ferguson-Coons que passa pelos pontos $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$ com declives nesses pontos especificados pelos pontos de guia $P_2 = (x_2, y_2)$ e $P_3 = (x_3, y_3)$, respectivamente, e pelo parâmetro de normalização λ.

   Mostre que a curva se pode escrever na forma

   $$\begin{aligned} x(t) &= \phi_0(t)x_0 + \phi_1(t)x_1 + \phi_2(t)x_2 + \phi_3(t)x_3, \\ y(t) &= \phi_0(t)y_0 + \phi_1(t)y_1 + \phi_2(t)y_2 + \phi_3(t)y_3, \end{aligned}$$

   onde as funções ϕ_i, $i = 0, 1, 2, 3$, são tais que $\displaystyle\sum_{i=0}^{3} \phi_i(t) = 1$.

2. Considere a função $f(x, y) = x \sin y$, com $(x, y) \in [0, 1] \times [0, \pi]$. Determine o polinómio linear em x e quadrático em y interpolador de f numa rede uniforme no intervalo dado, indicando um majorante para o erro cometido.

Formulário

$$\|f - s\|_\infty \leq \frac{h^{n+1}}{4(n+1)} \left\| \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}} \right\|_\infty + \frac{k^{m+1}}{4(m+1)} \left\| \frac{\partial^{m+1} f}{\partial y^{m+1}} \right\|_\infty + \frac{h^{n+1}k^{m+1}}{16(n+1)(m+1)} \left\| \frac{\partial^{n+m+2} f}{\partial x^{n+1} \partial y^{m+1}} \right\|_\infty .$$

3. A estrela S da Ursa Maior apresenta uma variação para a sua magnitude aparente m, em função do ângulo de fase θ (em graus), de acordo com os dados da seguinte tabela:

θ	-60	-20	20
m	9.40	11.39	10.84

   Usando um *spline* cúbico livre ($s''(a) = s''(b) = 0$), determine uma aproximação para o ângulo de fase pertencente ao intervalo $[-20, 20]$ em que a magnitude aparente da estrela é máxima.

Formulário

x	x_{i-2}	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	x_{i+2}
$B_i(x)$	0	1	4	1	0
$B_i''(x)$	0	$6/h^2$	$-12/h^2$	$6/h^2$	0

$$\begin{aligned} s_i(x) = \frac{1}{h^3} \Big[& C_{i-2}(x_i - x)^3 + C_{i-1}[h^3 + 3h^2(x_i - x) + 3h(x_i - x)^2 - 3(x_i - x)^3] \\ & + C_i[h^3 + 3h^2(x - x_{i-1}) + 3h(x - x_{i-1})^2 - 3(x - x_{i-1})^3] + C_{i+1}(x - x_{i-1})^3 \Big], \quad x \in [x_{i-1}, x_i]. \end{aligned}$$