Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Segunda Frequência de Tratamento Matemático das Observações (Eng. Geográfica)

5 de Junho de 2003 | Duração: 1h30m

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. (a) Seja $X = (X_1, X_2, X_3)$ um vector aleatório de esperança $E(X)$ e Y a variável aleatória dada por $Y = G(X)$, com

$$G: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & y \end{array}$$

uma função não linear com derivadas parciais de segunda ordem contínuas. Mostre que a esperança de Y é dada por $E(Y) \approx G(E(X))$ e, supondo que as variáveis aleatórias X_i, $i = 1, 2, 3$, são independentes, a covariância de Y é dada por

$$\sigma_Y^2 \approx \left(\frac{\partial G}{\partial x_1}(E(X))\right)^2 \sigma_{X_1}^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial x_2}(E(X))\right)^2 \sigma_{X_2}^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial x_3}(E(X))\right)^2 \sigma_{X_3}^2.$$

(b) Para se determinar uma distância D (metros) em Topografia usa-se muitas vezes a relação $D = G\sin^2 z$, com $G = 100(l_s - l_i)$, sendo z (grados) o ângulo zenital e l_s e l_i (metros) leituras numa régua graduada (mira). Suponhamos que foram efectuadas as seguintes medições, todas nas mesmas condições:

z (grados)	101.2733	101.2736	101.2732
l_s (metros)	1.756	1.754	1.757
l_i (metros)	1.000	0.997	1.001

.

Determine o valor mais provável para a distância D bem como para o respectivo desvio padrão.

2. (a) Sejam l_i, $i = 1, 2, ..., n$, valores observados para n quantidades que são funcionalmente independentes. Pretende-se que tais valores verifiquem um sistema de equações lineares da forma

$$A\hat{l} = d$$

em que A é uma matriz real do tipo $c \times n$, $d = [d_1, d_2, ..., d_c]^T$ e , $\hat{l} = [\hat{l}_1, \hat{l}_2, ..., \hat{l}_n]^T$, as observações ajustadas.

Utilizando o princípio dos mínimos quadrados e supondo que a matriz peso das observações é diagonal, obtenha um processo de cálculo para a determinação do vector dos valores ajustados $\hat{l}$.

(b) A seguinte tabela de valores médios de ângulos foi obtida por observações a partir de uma estação de triangulação A.

Ângulo	Valor médio	Número de repetições
BAE	$146^o27'31.2''$	10
BAC	$35^o17'48.6''$	6
CAD	$64^o45'31.0''$	8
DAE	$46^o24'06.4'$	6

.

Determine o valor mais provável para os ângulos observados, considerando as medições (não correlacionadas) com precisão directamente proporcional ao número de repetições efectuadas em cada observação.