Data de entrega: 5 de Junho de 2003

1. (a) Seja $X = (X_1, X_2)$ um vector aleatório de esperança $E(X)$ e Y a variável aleatória dada por $Y = G(X)$, com
$$\begin{array}{rccc} G: & IR^2 & \longrightarrow & IR \\ & (x_1, x_2) & \mapsto & y \end{array}$$
uma função não linear com derivadas parciais de segunda ordem contínuas. Mostre que a covariância de Y é dada por
$$\sigma_Y^2 \approx a_1^2 \sigma_{X_1}^2 + 2a_1 a_2 \sigma_{X_1 X_2} + a_2^2 \sigma_{X_2}^2,$$
com $a_i = \frac{\partial G}{\partial x_i}(E(X))$.

   (b) Para determinar a medida do perímetro da Terra (p), Eratóstenes (276-195 a.C.) usou a relação
$$p = \frac{2\pi}{\alpha} s,$$
sendo α o ângulo (em radianos) que os raios solares faziam com a vertical do lugar em Alexandria, no solestício de Verão, ao meio-dia, e s a distância de Alexandria a Siena (local onde se sabia que os raios solares, nessa data e nessa hora, incidiam verticalmente).
Suponhamos, por hipótese, que Eratóstenes efectuou as seguintes observações (na realidade ele só efectuou a primeira)

distância s (em estádios)	5000	5010	4985	5008	4991
ângulo α (em graus)	7.2^o	7.1^o	7.0^o	7.3^o	7.2^o

.

Considerando as observações não correlacionadas, determine uma estimativa para o valor mais provável do perímetro da Terra obtido por Eratóstenes bem como uma estimativa para o seu desvio padrão (1 estádio = 157.5 m = 0.1575 km).

2. (a) Sejam l_i, $i = 1, 2, ..., n$, valores observados para n quantidades que são funcionalmente independentes. Pretende-se que tais valores verifiquem um sistema de equações lineares da forma
$$A\hat{l} = d$$
em que A é uma matriz real do tipo $c \times n$, $d = [d_1, d_2, ..., d_c]^T$ e , $\hat{l} = [\hat{l}_1, \hat{l}_2, ..., \hat{l}_n]^T$, as observações ajustadas.
Utilizando o princípio dos mínimos quadrados e supondo que a matriz peso das observações é diagonal, obtenha um processo de cálculo para a determinação do vector dos valores ajustados $\hat{l}$.

   (b) Num nivelamento trignométrico de alta precisão entre quatro marcos foram feitas as seguintes observações (dN):

lado	distância (km)	dN (m)
AB	20	$+42.285$
BC	10	-12.016
BD	25	-20.240
CD	20	-8.114
DA	30	-22.224

Elabore um programa que permita determinar: (i) valores mais prováveis para as diferenças de nível entre os marcos; (ii) a matriz de covariância dos valores ajustados; (iii) uma estimativa para a variância de referência.